CONCURSUL JUDEȚEAN ”VIOREL SADOVEANU”
Ediția a V-a - 23.05.2026
Matematică
Clasa a III-a

Subiectul I – Pe foaia de concurs scrieți doar răspunsurile (5x10p=50p)

1. Dacă are loc egalitatea:
$$10+\ 10 : \{[\ 10\ +\ 10\,\mathrm{x}\,(\,\boldsymbol{a}\ -\ 10)\,]:10\ -\ 10\,\}\ -\ 10:10\ =\ 10$$
atunci valoarea numărului $\boldsymbol{a}$ este egală cu ……
2. Dan și Mircea vor să cumpere aceeași carte. Lui Dan îi lipsește jumătate din prețul cărții, iar lui Mircea îi lipsesc trei pătrimi din preț. Știind că cei doi au împreună 60 de lei, prețul cărții este egal cu ......
3. Dintr-o carte s-au dezlipit mai multe pagini consecutive. Prima pagină a acestei părți are numărul 103, iar numărul ultimei pagini este format din aceleași cifre, dar nicio cifră nu rămâne pe poziția inițială. Numărul de pagini din partea care s-a desprins este egal cu ....
4. Cea mai mică valoare posibilă a unui număr A care are suma cifrelor 28, iar suma cifrelor succesorului său este 20, este egală cu ……
5. Suma a două numere este 3 + 5 + … + 19 + 21, iar diferența lor este 4 + 6 + … + 12. Cele două numere sunt egale cu .... și ....

Subiectul II – Pe foaia de concurs scrieți rezolvările complete (2x20p=40p)

1. Într-un săculeț sunt bile numerotate cu toate numerele consecutive de la 1 la 2026, fără ca vreunul să se repete. David propune o provocare pentru prietenul său: extrage 4 bile. Îi cere prietenului său să reintroducă în sac bilele cu cel mai mare, respectiv cel mai mic număr dintre cele extrase. Repetă acest procedeu de mai multe ori: el extrage 4 bile, iar prietenul reintroduce în sac 2 bile (adică cel mai mic, respectiv cel mai mare număr).

a) De câte ori trebuie să se repete acest procedeu pentru ca în sac să rămână doar 4 bile?
b) Dacă rămân 4 bile, care este cea mai mică sumă posibilă a numerelor lor?
c) Dacă ultimele 4 numere scrise pe bilele rămase au suma 6075, care sunt cele patru numere?

2. Alin și Vlad sunt doi vecini. Alin are acum de patru ori vârsta pe care o avea el când Vlad era de vârsta pe care o are Alin acum. Ce vârste au cei doi acum, dacă peste 2 ani vor avea 37 de ani împreună?

Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 120 de minute.

Barem de notare

Subiectul I

1. 29
2. 80
3. 208
4. 2989
5. 80, 40

Subiectul II

1. a) Sunt 2026 de numere și trebuie să rămână 4, deci vor fi scoase

$$2026 - 4 = 2022 \text{ de bile}$$

La fiecare pas se scot două bile, deci vom avea nevoie de $2022 : 2 = 1011$ de ori să se întâmple procedeul. ……………………………….**5p**

b) Observăm că dacă nu se pot elimina bilele cu cel mai mic număr, respectiv cel mai mare număr, atunci bilele cu 1 și 2026 vor rămâne tot timpul în sac.

Cea mai mică sumă posibilă va fi suma numerelor: 1, 2, 3 și 2026.

$$1 + 2 + 3 + 2026 = 2032$$ ……………………………………… **5p**

c) Numerele 1 și 2026 vor rămâne în sac, astfel avem:

$$1 + a + b + 2026 = 6075$$

$$a + b = 4048$$

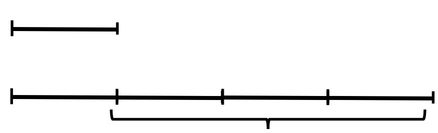
De unde a și b pot fi doar 2023 și 2025. …………………………………… **10p**

2. Care e suma vârstelor în prezent? 37 – 2 – 2 = 33 ani ……………………… **3p**

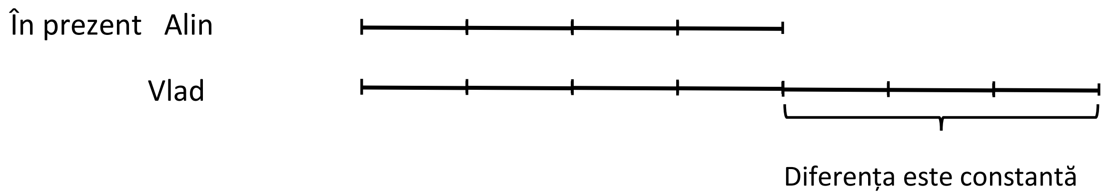
Reprezentarea grafică a vârstelor celor doi băieți în trecut, respectiv în prezent

În trecut Alin

Vlad



Diferența este constantă



Vârsta lui Vlad în trecut = vârsta lui Alin în prezent

Vârsta lui Alin în prezent = de 4 ori mai mare decât vârsta lui însuși în trecut

În trecut, Vlad era de 4 ori mai mare decât Alin.

Diferența de vârsta dintre cei doi copii este constantă, aceeași pe tot parcursul vieții.

Reprezentare grafică sau relații matematice corecte **7p**

Câți ani avea Alin? 33: 11 = 3 ani

Câți ani are Alin acum? 3 x 4 = 12 ani

Câți ani are Vlad acum? 3 x 7 = 21 ani ……………………………… 1**0p**

CONCURSUL JUDEȚEAN ”VIOREL SADOVEANU”
Ediția a V-a - 23.05.2026
Matematică
Clasa a IV-a

Subiectul I – Pe foaia de concurs scrieți doar răspunsurile (5x10p=50p)

1. Dacă are loc egalitatea:
$$2866 - \{51 \times 15 + [225 : 15 \times (\boldsymbol{n} + 35) - 510]\} = 2026$$
atunci valoarea numărului $\boldsymbol{n}$ este egală cu ……
2. Dacă numărul natural $\overline{abc}$ împărțit la 6, dă câtul $\overline{bc}$ și restul $5 \times a$, atunci $\overline{abc}$ este egal cu ……
3. Știind că 7 albume, o carte și 5 caiete costă împreună 100 de lei, iar un album, 7 cărți și 3 caiete costă împreună 60 de lei, atunci prețul a 3 cărți și al unui caiet este egal cu … .
4. Fie șirul $1, 3, 4, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 16, \ldots$ Următorul număr din șir este egal cu ……., iar al 50-lea termen al șirului este egal cu ……
5. Se dă numărul $N = 3 + 33 + 333 + \cdots + \underbrace{333\ldots3}_{112\ cifre}$. Suma ultimelor 3 cifre ale numărului N este …..

Subiectul II – Pe foaia de concurs scrieți rezolvările complete (2x20p=40p)

1. În două lăzi sunt portocale de aceeași calitate. Portocalele din prima ladă costă 390 lei. Dacă din a doua ladă transferăm 40 kg în prima ladă, atunci în a doua ladă rămân de trei ori mai puține portocale decât în prima. Câte kilograme de portocale sunt în fiecare ladă, știind că portocalele din cele două lăzi valorează 840 lei?
2. Într-o urnă sunt puse bile numerotate de la 1 la 150 și se extrag 10 bile.

a) Arătați că cel puțin 4 numere de pe bilele extrase vor avea același număr de cifre.

b) Care este cea mai mică sumă posibilă pe care o putem obține adunând numerele de pe cele 10 bile extrase?

c) Dacă suma numerelor de pe bilele extrase este 995, arătați că nu pot avea toate numerele de pe bilele extrase același număr de cifre.

Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 120 de minute.

Barem de corectare

Clasa a IV-a

Subiectul I

6. 4
7. 119
8. 20
9. 21,   95
10. 18

Subiectul II

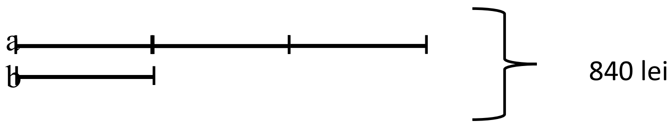
1.

Fie *a* = nr. kg din prima ladă

b = nr. kg a doua ladă

a + 40 kg = (b – 40 kg) x 3

Reprezentarea grafică a cantităților din cele 2 lăzi după transfer ………….. **2p**



Aflăm valoarea unui segment

840 lei : 4 = 210 lei

Cât costă portocalele din prima ladă după transfer?

210 lei x 3 = 630 lei

Care este diferența de preț pentru cele 40 de kg?

630 lei - 390 lei = 240 lei

Cât costă un kg de portocale?

240 : 40 = 6 lei ………………. **12p**

Câte kg au fost inițial în prima ladă?

390 : 6 = 65 kg

Câte kg au fost inițial în a doua ladă?

(840 – 390) : 6 = 75 kg ………………. **6p**

2.

a) Numerele de la 1 la 150 se împart în trei categorii: de o cifră, de două cifre și de trei cifre. Astfel din Principiul lui Dirichlet ne rezultă că va exista cel puțin o categorie cu minim 4 numere extrase. ……………….. **6p**

b) Pentru a calcula suma minimă, alegem cele mai mici 10 numere:

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55$$ ….………….. **6p**

c) Nu se poate ca toate numerele să aibă o cifră deoarece sunt doar 9 numere de o cifră, iar suma lor este prea mică.

Dacă toate numerele ar avea câte două cifre, atunci cea mai mare sumă posibilă ar fi:

$$S = 90 + 91 + \cdots + 99 = 945 < 995$$

Dacă toate numerele ar avea câte trei cifre, atunci cea mai mica sumă posibilă ar fi:

$$S = 100 + 101 + \cdots + 109 = 1045 > 995$$

Astfel, numerele de pe bilele extrase vor avea număr diferit de cifre. ……….. **8p**

.

CONCURSUL JUDEȚEAN ”VIOREL SADOVEANU”

Ediția a V-a - 23.05.2026

Matematică

Clasa a V-a

Problema 1.

Fie $A = (15^{n+1} \cdot 18^{2n+6}) : (3^{5n+13} \cdot 4^{n})$; $n \in \mathbb{N}$

a) Determinați cea mai mică valoare a lui n pentru care A este pătrat perfect și cub perfect.
b) Găsiți ultima cifră nenulă a lui A, în funcție de valorile lui n.

Problema 2.

Spunem că un număr natural $\boldsymbol{n}$ este ***superpătrat*** dacă este pătrat perfect și se poate scrie ca suma a două pătrate perfecte nenule.

a) Dați un exemplu de număr ***superpătrat***.
b) Demonstrați că, dacă a este ***superpătrat***, atunci și a^{2026} este ***superpătrat***.
c) Demonstrați că suma pătratelor a două numere prime nu este ***superpătrat***.

Problema 3.

Alina scrie pe tablă toate numerele impare de forma $\overline{abcdef}$ cu proprietatea că numerele $\overline{abc}$ și $\overline{def}$ divid numărul $\overline{abcdef}$.

a) Arătați că numărul 125625 este scris pe tablă, iar numărul 625125 nu este scris pe tablă.
b) Dați un exemplu de număr scris pe tablă care are toate cele șase cifre diferite.
c) Să se afle câte numere a scris Alina pe tablă.

Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 120 de minute.
Pentru fiecare problemă se acordă 7p.

Problema 1.

Fie $A = (15^{n+1} \cdot 18^{2n+6}) : (3^{5n+13} \cdot 4^n)$; $n \in \mathbb{N}$

a) Determinați cea mai mică valoare a lui n pentru care A este pătrat perfect și cub perfect.
b) Găsiți ultima cifră nenulă a lui A, în funcție de valorile lui n.

Barem

a)

$A = (15^{n+1} \cdot 18^{2n+6}) : (3^{5n+13} \cdot 4^n) = (3^{n+1} \cdot 5^{n+1} \cdot 3^{4n+12} \cdot 2^{2n+6}) : (3^{5n+13} \cdot 2^{2n})$

$= (3^{5n+13} \cdot 5^{n+1} \cdot 2^{2n+6}) : (3^{5n+13} \cdot 2^{2n}) = 5^{n+1} \cdot 2^6$

Pentru ca A să fie pătrat perfect și cub perfect $n + 1 \vdots 6$, deci $n = 5$,$A = 5^6 \cdot 2^6 = 10^6 = (10^2)^3 = (10^3)^2$……………………………….**3p**

b) Notăm ultima cifră nenulă a lui A cu $u^*(A)$

Dacă $n = 0 \Rightarrow A = 5 \cdot 2^6 \Rightarrow u^*(A) = u^*(5 \cdot 2^6) = u^*(10 \cdot 2^5) = u(2^5) = 2$

Dacă $n = 1 \Rightarrow A = 5^2 \cdot 2^6 \Rightarrow u^*(A) = u^*(5^2 \cdot 2^6) = u^*(10^2 \cdot 2^4) = u(2^4) = 6$

Dacă $n = 2 \Rightarrow A = 5^3 \cdot 2^6 \Rightarrow u^*(A) = u^*(5^3 \cdot 2^6) = u^*(10^3 \cdot 2^3) = u(2^3) = 8$

Dacă $n = 3 \Rightarrow A = 5^4 \cdot 2^6 \Rightarrow u^*(A) = u^*(5^4 \cdot 2^6) = u^*(10^4 \cdot 2^2) = u(2^2) = 4$

Dacă $n = 4 \Rightarrow A = 5^5 \cdot 2^6 \Rightarrow u^*(A) = u^*(5^5 \cdot 2^6) = u^*(10^5 \cdot 2) = u(2) = 2$

Dacă $n = 5 \Rightarrow A = 5^6 \cdot 2^6 \Rightarrow u^*(A) = u^*(5^6 \cdot 2^6) = 1$

Dacă $n = 6 \Rightarrow A = 5^7 \cdot 2^6 \Rightarrow u^*(A) = u^*(5^7 \cdot 2^6) = u^*(10^6 \cdot 5) = 5$

Deci pentru $n > 6 \Rightarrow u^*(A) = 5$**…..4p**

Problema 2.

Spunem că un număr natural n este ***superpătrat*** dacă este pătrat perfect și se poate scrie ca suma a două pătrate perfecte nenule.

a) Dați un exemplu de număr ***superpătrat***.
b) Demonstrați că, dacă a este ***superpătrat***, atunci și a^{2026} este ***superpătrat***.
c) Demonstrați că suma pătratelor a două numere prime nu este ***superpătrat***.

Barem

a) Deoarece $25 = 5^2$ și $25 = 3^2 + 4^2$ obținem că 25 este ***superpătrat*** ………………**2p**

b) Deoarece a este ***superpătrat***, există numere naturale nenule x, y, z astfel încât $a = x^2$ și $a = y^2 + z^2$.

Atunci $a^{2026} = (a^{1003})^2$deci este pătrat perfect…………………………………….

În plus, $a^{2026} = a^{2025} \cdot (y^2 + z^2) = (x^{2025} \cdot y)^2 + (x^{2025} \cdot z)^2$

Prin urmare, a^{2026}este ***superpătrat***………….**2p**

c) Fie p și q, $p \leq q$ două numere prime și $a = p^2 + q^2$.

Dacă p este impar $a = p^2 + q^2 = (M_4 + 1) + (M_4 + 1) = M_4 + 2$ nu este pătrat perfect deci nu este ***superpătrat***. Prin urmare $p = 2$…………………………….**1p**

Dacă q nu este 3, atunci $a = 2^2 + q^2 = 4 + (M_3 + 1) = M_3 + 2$ nu este pătrat perfect. Deci $q = 3$………………………………………**1p**

Dar $2^2 + 3^2 = 13$ nu este pătrat perfect. Prin urmare a nu este ***superpătrat***……**1p**

Problema 3.

Alina scrie pe tablă toate numerele impare de forma $\overline{abcdef}$ cu proprietatea că numerele $\overline{abc}$ și $\overline{def}$ divid numărul $\overline{abcdef}$.

a) Arătați că numărul 125625 este scris pe tablă, iar numărul 625125 nu este scris pe tablă.
b) Dați unexemplu de număr scris pe tablă care are toate cele șase cifre diferite.
c) Să se afle câte numere a scris Alina pe tablă.

Barem

a) Verificarea divizibilităților…………………..**2p**

b) Numărul 137685 este divizibil atât cu 137 cât și cu 685 deci este scris pe tablă și are toate cifrele diferite………………………………………………………………**2p**

c) Din condiția $\overline{abc} \mid \overline{abcdef}$ și din egalitatea $\overline{abcdef} = 1000\overline{abc} + \overline{def}$ obținem $\overline{abc} \mid \overline{def}$, deci există un număr natural $k \leq 9$ astfel încât $\overline{def} = k\overline{abc}$ ……..**1p**

Folosim acum condiția $\overline{def} \mid \overline{abcdef}$. Deoarece $\overline{def} = k\overline{abc}$, obținem $k \mid 1000$, prin urmare $k \in \{1,2,4,5,8\}$…………………..

Deoarece $\overline{def}$, este impar rezultă că k este impar. Așadar $k \in \{1,5\}$ ……**1p**

Dacă $k = 1$ atunci numerele sunt de forma $\overline{abcabc} = 1001\overline{abc}$, unde $\overline{abc}$ este număr impar de trei cifre .Sunt 450 astfel de numere

Dacă $k = 5$ Atunci atunci numerele sunt de forma $\overline{abcdef} = 1005\overline{abc}$, unde $\overline{abc} \leq 199$ este număr impar.Sunt 50 astfel de numere

Deci sunt 500 de numere …………………**1p**

CONCURSUL JUDEȚEAN ”VIOREL SADOVEANU”

Ediția a V-a - 23.05.2026

Matematică

Clasa a VI-a

Problema 1.

Fie numărul $S = 2026! \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2026}\right)$, unde $2026! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2026$.

Arătați că S este număr natural și se divide cu 2027.

Problema 2.

Pe o tablă sunt scrise numerele $1, 2, 3, \ldots, 499, 500$. Andrei și Bogdan șterg pe rând numere de pe tablă astfel: mai întâi Andrei șterge numerele de pe pozițiile impare, apoi, din numerele rămase pe tablă, Bogdan șterge numerele de pe pozițiile pare. Jocul continuă în același mod (Andrei șterge pozițiile impare, Bogdan pe cele pare) până sunt șterse toate numerele. Dacă la un moment dat pe tablă rămâne un singur număr, jucătorul căruia îi vine rândul îl va șterge direct, finalizând jocul.

a) Arătați că suma numerelor din primul set de numere șterse de Andrei este pătrat perfect.

b) Cine șterge ultimul număr de pe tablă și care este acest număr?

Problema 3.

În triunghiul isoscel ABC , cu $AB = AC$ avem $\widehat{BAC} = 100°$. Considerăm $[BD$ bisectoarea unghiului $\widehat{ABC}$, $D \in (AC)$ și $[DE$ bisectoarea unghiului $\widehat{BDC}$, $E \in (BC)$

a) Determinați măsura unghiului $\widehat{EAC}$.

b) Dacă $AB \cap DE = \{F\}$, aflați măsura unghiului $\widehat{BFC}$ și arătați că triunghiul FBC este isoscel.

Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 120 de minute.
Pentru fiecare problemă se acordă 7p.

Problema 1.

Fie numărul $S = 2026!\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2026}\right)$, unde $2026! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2026$.

Arătați că S este număr natural și se divide cu 2027.

Barem

Numărul S se poate scrie ca o sumă de 2026 de termeni de forma $\frac{2026!}{n}$ unde $n \in \{1, 2, 3, \ldots . 2026\}$. Fiecare dintre aceștia este număr natural, de unde avem că S este număr natural **(2p)**

În paranteză grupăm termenii astfel $\left(1 + \frac{1}{2026}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2025}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2024}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{1013} + \frac{1}{1014}\right) = \left(\frac{2027}{1 \cdot 2026} + \frac{2027}{2 \cdot 2025} + \frac{2027}{3 \cdot 2024} + \cdots \frac{2027}{1013 \cdot 1014}\right)$ **(2p)**

De unde obținem că numărul $S = 2027 \cdot (2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2025 + 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2024 \cdot 2026 + \cdots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots 1012 \cdot 1015 \cdot \ldots 2026)$ **(3p)**

Problema 2.

Pe o tablă sunt scrise numerele $1, 2, 3, \ldots, 499, 500$. Andrei și Bogdan șterg pe rând numere de pe tablă astfel: mai întâi Andrei șterge numerele de pe pozițiile impare, apoi, din numerele rămase pe tablă, Bogdan șterge numerele de pe pozițiile pare. Jocul continuă în același mod (Andrei șterge pozițiile impare, Bogdan pe cele pare) până sunt șterse toate numerele. Dacă la un moment dat pe tablă rămâne un singur număr, jucătorul căruia îi vine rândul îl va șterge direct, finalizând jocul.

a) Arătați că suma numerelor din primul set de numere șterse de Andrei este pătrat perfect.

b) Cine șterge ultimul număr de pe tablă și care este acest număr?

Barem

a) $1 + 3 + 5 + \cdots + 499 = 250^2$ **(2p)**

b) După prima rundă (adică după ce Andrei și Bogdan șterg fiecare o dată numere de pe tablă) rămân numerele $2, 6, 10, 14, 18, 22, \ldots, 494, 498$ (numerele de forma $4k + 2$) **(1p)**.

Se observă că al doilea element al șirului din runda k (adică după ce Andrei și Bogdan au șters alternativ de $\mathrm{k}-1$ ori numere de pe tablă) devine primul element al șirului din runda $\mathrm{k}+1$ **(2p)**.

În plus, la runda k, distanța dintre două elemente alăturate ale șirului este egală cu $2^{2(k-1)}$.

Atunci:

Al doilea element la începutul rundei 1 este 2

Al doilea element la începutul rundei 2 este $2+2^2=6$

Al doilea element la începutul rundei 3 este $2+2^2+2^4=22$

Al doilea element la începutul rundei 4 este $2+2^2+2^4+2^6=86$

La începutul rundei 5 au rămans pe tablă numerele 86 și $86+2^8=342$. Andrei va șterge numărul 86, iar Bogdan îl va șterge pe ultimul, care este 342 **(2p)**

Problema 3.

În triunghiul isoscel ABC , cu $AB=AC$ avem $\widehat{BAC}=100°$. Considerăm $[BD$ bisectoarea unghiului $\widehat{ABC}$, $D\in(AC)$ și $[DE$ bisectoarea unghiului $\widehat{BDC}$, $E\in(BC)$

a) Determinați măsura unghiului $\widehat{EAC}$.

b) Dacă $AB\cap DE=\{F\}$, aflați măsura unghiului $\widehat{BFC}$ și arătați că triunghiul FBC este isoscel.

Barem

a) În triunghiul isoscel ABC cu $\widehat{BAC}=100° \Longrightarrow \widehat{ABC}=\widehat{ACB}=40°$ **(1p)**

Dacă $[BD$ bisectoarea unghiului $\widehat{ABC} \Longrightarrow \widehat{ABD}=\widehat{DBC}=20°$ și $\widehat{BDC}=120°$

Cum $[DE$ bisectoarea unghiului $\widehat{BDC}$ avem $\widehat{BDE}=\widehat{BDA}=\widehat{EDC}=60°$.

Atunci $\Delta ABD\equiv\Delta EBD$ (U.L.U.) **(1p)**

$\Longrightarrow DA=DE \Longrightarrow \Delta DAE$ este isoscel. Cum $\widehat{ADE}=120° \Longrightarrow \widehat{EAC}=30°$ **(1p)**

b) Din $\Delta ABD\equiv\Delta EBD$ avem $\widehat{BAD}=\widehat{BED}=100°$ **(1p)**

$\widehat{FAD}=\widehat{CED}=80°; AD= ED;\ \widehat{ADF}=\widehat{EDC}=60° \Longrightarrow \Delta ADF\equiv\Delta EDC$ (U.L.U.) **(1p)**

$\Longrightarrow \widehat{AFD}=\widehat{ECD}=40°$ și ΔCDF isoscel **(1p)**;

$\widehat{CDF}=120° \Longrightarrow \widehat{DCF}=\widehat{DFC}=30°$

$\Longrightarrow \widehat{BCF}=\widehat{FCB}=70° \Longrightarrow FBC$ este isoscel **(1p)**

CONCURSUL JUDEȚEAN ”VIOREL SADOVEANU”

Ediția a V-a - 23.05.2026

Matematică

Clasa a VII-a

Problema 1.

Să se rezolve în $\mathbb{N}^*$ ecuaţia $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{12}}$.

Problema 2.

Fie $n \in \mathbb{N}$ şi $A_n = \left\{x \in \mathbb{Z} \middle| \sqrt{n} \le x \le \sqrt{n+13}\right\}$.

a) Pentru ce valori ale lui n mulţimea A_n are exact trei elemente?

b) Găsiţi cea mai mică valoare a lui n pentru care $A_n = \emptyset$.

Problema 3.

Considerăm paralelogramul $ABCD$ și punctele E și F astfel încât E este simetricul lui A față de C, iar $F \in AD$, $EF \parallel CD$. Fie M și N intersecțiile perechilor de drepte FC și BE, respectiv BF și AE.

a Demonstrați că $MN \parallel EF$.

b Aflați raportul dintre aria patrulaterului $BMCN$ și aria paralelogramului $ABCD$.

Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 120 de minute.
Pentru fiecare problemă se acordă 7p.

Problema 1.

Să se rezolve în $\mathbb{N}^*$ ecuaţia $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{12}}$.

Barem

Din $\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{12}}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ rezultă $\sqrt{x}>\sqrt{12}$, deci $x>12$; analog $y>12$. **1p** Prin ridicare la pătrat obţinem $\frac{1}{y}=\frac{1}{12}+\frac{1}{x}-\frac{2}{\sqrt{12x}}$ **1p** deci $\sqrt{3x}\in\mathbb{Q}$ şi atunci avem $x=3k^2, k\in\mathbb{Z}^*$. Analog găsim $y=3p^2, p\in\mathbb{Z}^*$ **1p** Ecuaţia devine $\frac{1}{|k|}+\frac{1}{|p|}=\frac{1}{2}$. Dacă $|k|\le|p|$ avem $\frac{2}{|p|}\le\frac{1}{|k|}+\frac{1}{|p|}\le\frac{2}{|k|}$, deci $\frac{2}{|p|}\le\frac{1}{2}\le\frac{2}{|k|}$ şi atunci $|p|\ge 4, |k|\le 4$. **2p** Pentru $|k|=1$respectiv $|k|=2$ nu există nicio soluţie. Dacă $|k|=3$ avem $|p|=6$, cu soluţia $x=27, y=108$, iar dacă $|k|=4$ rezultă $|p|=4$ şi se obţine soluţia $x=48, y=48$. Analog, în cazul $|k|\ge|p|$ vom obţine $|k|=6, |p|=3$ cu soluţia $x=108, y=27$. **2p**

Problema 2.

Fie $n\in\mathbb{N}$ şi $A_n=\{x\in\mathbb{Z} \mid \sqrt{n}\le x\le\sqrt{n+13}\}$.

a) Pentru ce valori ale lui n mulţimea A_n are exact trei elemente?

b) Găsiţi cea mai mică valoare a lui n pentru care $A_n=\emptyset$.

Barem

a Dacă A_n are exact trei elemente, atunci acestea sunt trei numere naturale consecutive. Fie $k, k+1, k+2$ cele trei elemente ale lui A_n, $k\in\mathbb{N}$. **1p** Avem $n\le k^2<(k+1)^2<(k+2)^2\le n+13$, de unde $4k+4=(k+2)^2-k^2\le n+13-n=13$. **1p** Astfel obţinem $k\in\{0,1,2\}$, deci $n\le k^2\le 4$. Avem $A_0=\{0,1,2,3\}$, $A_1=\{1,2,3\}$, $A_2=\{2,3\}$, $A_3=\{2,3,4\}$ şi $A_4=\{2,3,4\}$, deci convin cazurile $n=1, n=3, n=4$. **2p**

b Fie $N=[\sqrt{n}]$. Atunci $N+1>\sqrt{n}$. **1p** Pentru a avea $N+1\notin A_n$, este necesar ca $N+1>\sqrt{n+13}$ sau, echivalent, $(N+1)^2>n+13\ge N^2+13$, deci $N>6$. Pentru $N=7$ se obţine $n\ge 49$; observăm că $n=49$ nu convine ($7\in A_{49}$), dar $A_{50}=\emptyset$, deci $n=50$ este valoarea căutată. **2p**

Problema 3.

Considerăm paralelogramul $ABCD$ și punctele E și F astfel încât E este simetricul lui A față de C, iar $F\in AD$, $EF\parallel CD$. Fie M și N intersecțiile perechilor de drepte FC și BE, respectiv BF și AE.

a Demonstraţi că $MN\parallel EF$.

b Aflați raportul dintre aria patrulaterului $BMCN$ și aria paralelogramului $ABCD$.

Barem

a CD este linie mijlocie în $\triangle AEF$, prin urmare $EF=2CD=2AB$ şi $AD=DF$ **1p**

Din $EF\parallel AB$, $\triangle ABN\sim\triangle EFN$, aşadar $\frac{BN}{FN}=\frac{AB}{EF}=\frac{AN}{EN}=\frac{1}{2}$ **1p**

Fie O centrul paralelogramului $ABCD$. Rezultă OD linie mijlocie în $\triangle ACF$, deci $OD \parallel CD$, adică $BO \parallel CM$ **1p**

Obţinem $\frac{BM}{EM} = \frac{OC}{CE} = \frac{1}{2}$, deci $\frac{BM}{EM} = \frac{BN}{FN} = \frac{1}{2}$. Aşadar $MN \parallel EF$ **1p**

b Observăm că $A_{ABE} = 2A_{ABC} = A_{ABCD}$. Avem $\frac{A_{CEM}}{A_{ABE}} = \frac{CE}{AE} \cdot \frac{EM}{BE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$şi $A_{CEM} = \frac{1}{3}A_{ABE} = \frac{1}{3}A_{ABCD}$ **1p**

Dar $\frac{EN}{AN} = 2$, prin urmare $\frac{EN}{AE} = \frac{2}{3}$ deci $\frac{A_{BEN}}{A_{ABE}} = \frac{2}{3}$ **1p** Aşadar $A_{BEN} = \frac{2}{3}A_{ABE} = \frac{2}{3}A_{ABCD}$ şi $A_{BMCN} = A_{BEN} - A_{CEM} = \frac{1}{3}A_{ABCD}$ **1p**

CONCURSUL JUDEȚEAN ”VIOREL SADOVEANU”

Ediția a V-a - 23.05.2026

Matematică

Clasa a VIII-a

Problema 1.

Calculați suma

$$S = \left\{\frac{2026 + n}{2025}\right\} + \left\{\frac{2 \cdot 2026 + n}{2025}\right\} + \cdots + \left\{\frac{2025 \cdot 2026 + n}{2025}\right\},$$

unde n este un întreg oarecare, iar $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului x.

Problema 2.

Fie $n \in \mathbb{N}$ şi $A_n = \left\{x \in \mathbb{Z} \middle| \sqrt{n} \leq x \leq \sqrt{n+13}\right\}$.

a) Pentru ce valori ale lui n mulţimea A_n are exact trei elemente?

b) Găsiţi cea mai mică valoare a lui n pentru care $A_n = \emptyset$.

Problema 3.

Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu lungimea laturii l. Punctul M este mijlocul laturii DD' și O centrul feței $DCC'D'$. Fie S simetricul lui A față de M și P proiecția lui A' pe SB.

a) Calculați tangenta unghiului dintre dreapta SB și planul $(AA'B')$.

b) Demonstrați că $SB \perp A'C$.

c) Calculați lungimea segmentului OP.

Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 120 de minute.
Pentru fiecare problemă se acordă 7p.

Problema 1.

Calculați suma

$$S=\left\{\frac{2026+n}{2025}\right\}+\left\{\frac{2\cdot 2026+n}{2025}\right\}+\cdots+\left\{\frac{2025\cdot 2026+n}{2025}\right\},$$

unde n este un întreg oarecare, iar $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului x.

Barem

$$S=\left\{\frac{2026+n}{2025}\right\}+\left\{\frac{2\cdot 2026+n}{2025}\right\}+\cdots+\left\{\frac{2025\cdot 2026+n}{2025}\right\}$$

$$=\left\{1+\frac{1+n}{2025}\right\}+\left\{2+\frac{2+n}{2025}\right\}+\cdots+\left\{2025+\frac{2025+n}{2025}\right\}$$

$$=\left\{1+\frac{1+n}{2025}\right\}+\left\{2+\frac{2+n}{2025}\right\}+\cdots+\left\{2025+\frac{2025+n}{2025}\right\}$$

Din teorema împărțirii cu rest, pentru orice $k\ \in\{1,2,\dots,2025\}$, avem $k+n=2025c_k+r_k$, unde $c_k\in\mathbb{Z}, 0\le r_k<2025$. Rezultă că $\left\{\frac{k+n}{2025}\right\}=\frac{r_k}{2025}$.

Arătăm că resturile $r_1,r_2,\dots,r_{2025}$ sunt distincte două câte două.

Dacă, prin absurd, ar exista $i<j$ astfel încât $r_i=r_j$, atunci $2025(c_j-c_i)=j-i$ de unde $2025\mid(j-\mathrm{i})$. Cum $0<j-i<2025$, contradicție. Prin urmare, resturile sunt distincte.

Așadar,

$$\{r_1,r_2,\dots,r_{2025}\}=\{0,1,2,\dots,2024\}.$$

Folosind relația de mai sus, avem

$$S=\sum_{k=1}^{2025}\frac{r_k}{2025}=\frac{r_1+r_2+\cdots+r_{2025}}{2025}=\frac{0+1+2+\cdots+2024}{2025}=1012.$$

Problema 2.

Fie $n\in\mathbb{N}$ şi $A_n=\left\{x\in\mathbb{Z}\middle|\sqrt{n}\le x\le\sqrt{n+13}\right\}$.

a) Pentru ce valori ale lui n mulţimea A_n are exact trei elemente?

b) Găsiţi cea mai mică valoare a lui n pentru care $A_n = \emptyset$.

Barem

a Dacă A_n are exact trei elemente, atunci acestea sunt trei numere naturale consecutive. Fie $k, k+1, k+2$ cele trei elemente ale lui A_n, $k \in \mathbb{N}$. **1p** Avem $n \le k^2 < (k+1)^2 < (k+2)^2 \le n+13$, de unde $4k+4 = (k+2)^2 - k^2 \le n+13-n = 13$. **1p** Astfel obţinem $k \in \{0,1,2\}$, deci $n \le k^2 \le 4$. Avem $A_0 = \{0,1,2,3\}$, $A_1 = \{1,2,3\}$, $A_2 = \{2,3\}$, $A_3 = \{2,3,4\}$ şi $A_4 = \{2,3,4\}$, deci convin cazurile $n=1, n=3, n=4$. **2p**
b Fie $N = [\sqrt{n}]$. Atunci $N+1 > \sqrt{n}$. **1p** Pentru a avea $N+1 \notin A_n$, este necesar ca $N+1 > \sqrt{n+13}$ sau, echivalent, $(N+1)^2 > n+13 \ge N^2+13$, deci $N > 6$. Pentru $N=7$ se obţine $n \ge 49$; observăm că $n = 49$ nu convine ($7 \in A_{49}$), dar $A_{50} = \emptyset$, deci $n = 50$ este valoarea căutată. **2p**

Problema 3.

Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu lungimea laturii l. Punctul M este mijlocul laturii DD' și O centrul feței $DCC'D'$. Fie S simetricul lui A față de M și P proiecția lui A' pe SB.

a) Calculați tangenta unghiului dintre dreapta SB și planul $(AA'B')$.
b) Demonstrați că $SB \perp A'C$.
c) Calculați lungimea segmentului OP.

Barem

a)

$$\left.\begin{array}{l} M - \text{mijl. } DD' \\ M - \text{mijl. } AS \end{array}\right\} \Rightarrow ADSD' \text{ paralelogram} \Rightarrow AD \parallel SD' \text{ și } AD = SD' = l \Rightarrow S = \text{sim}_{D'}A'.$$

$$\left.\begin{array}{l} SA' \perp (AA'B') \\ B \in (AA'B') \end{array}\right\} \Rightarrow \text{tg}(\sphericalangle(SB,(AA'B'))) = \text{tg}(\sphericalangle(SB,A'B)) = \text{tg}(\widehat{SBA'}).$$

În $\triangle SA'B$ dreptunghic în A': $\text{tg}(\widehat{SBA'}) = \frac{SA'}{A'B} = \frac{2l}{l\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ 2p

b)

$$\left.\begin{array}{l} SA' \parallel BC \\ BC \perp (AA'B') \end{array}\right\} \Rightarrow BCSA' \text{ trapez dreptunghic.}$$

Cum $\frac{BC}{BA'} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{BA'}{A'S}$ și $\hat{B} = \widehat{A'} = 90° \overset{\text{L.U.L.}}{\Longrightarrow} \triangle BCA' \sim \triangle A'BS$.

de unde $\widehat{BPC} = 90°$, deci $SB \perp A'C$ 3p

c)

Se demonstrează că S, O, A', B sunt coplanare.

În $\triangle SA'B$: $\left.\begin{array}{l} D'O \parallel A'B \\ D' - \text{mijl. } SA' \end{array}\right\} \overset{\text{R.T.l.m}}{\Longrightarrow} D'O$ linie mijlocie $\Longrightarrow O -$ mijl. SB.

$\triangle COP \sim \triangle A'BP \ (T.F.A.) \Longrightarrow \frac{OP}{BP} = \frac{CO}{A'B} = \frac{1}{2} \Longrightarrow OP = \frac{BO}{3} = \frac{SB}{6} = \frac{l\sqrt{6}}{6}$ ……………........... 2p

CONCURSUL JUDEȚEAN ”VIOREL SADOVEANU”
Ediția a V-a - 23.05.2026
Matematică
Clasa a IX-a

Problema 1.

Fie $a, b \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}$ cu $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ şi $f, g\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ definite prin:

$$f(n) = [na], g(n) = [nb]$$

a. Arătaţi că f este strict crescătoare.

b. Demonstraţi că $\mathrm{Im}f \cap \mathrm{Im}g = \emptyset$ şi $\mathrm{Im}f \cup \mathrm{Im}g = \mathbb{N}^*$.

Problema 2.

Fie ABC un triunghi dreptunghic în A. Cercul exînscris triunghiului este tangent ipotenuzei BC în M şi prelungirilor laturilor AB, AC în N, P. Arătaţi că ortocentrul triunghiului MNP aparţine dreptei suport a înălţimii din A a triunghiului ABC.

Problema 3.

Determinaţi şirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ din intervalul $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ştiind că şirurile $(\sin a_n)_{n\geq 1}$ şi $(\cos a_n)_{n\geq 1}$ sunt progresii geometrice.

Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 120 de minute.
Pentru fiecare problemă se acordă 7p.

Barem de notare.

Problema 1. Fie $a, b \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}$ cu $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ şi $f, g: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ definite prin:

$$f(n)=[na], g(n)=[nb]$$

- **a.** Arătaţi că f este strict crescătoare.
- **b.** Demonstraţi că $\mathrm{Im}f \cap \mathrm{Im}g = \emptyset$ şi $\mathrm{Im}f \cup \mathrm{Im}g = \mathbb{N}^*$.

Barem:

- **a.** Deoarece $a>1$ avem:
  $f(n+1)=[(n+1)a] \geq [na]+[a] \geq [na]+1 > f(n)$...**2p**
- **b.** Presupunem că $\mathrm{Im}f \cap \mathrm{Im}g \neq \emptyset$. Atunci există $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $[ma]=[nb]=k$.
  Cum $a \notin \mathbb{Q}$, $ma \notin \mathbb{Z}$, deci $k < ma < k+1$ şi $\frac{k}{a} < m < \frac{k+1}{a}$.
  Analog şi $\frac{k}{b} < n < \frac{k+1}{b}$. Prin urmare $k < m+n < k+1$, contradicţie...**3p**
  Presupunem că $\mathrm{Im}f \cup \mathrm{Im}g \neq \mathbb{N}^*$, adică există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $k \neq [na]$ şi $k \neq [nb]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci există $p. q \in \mathbb{N}^*$ astfel încât
  $$[pa] < k < [(p+1)a] \text{ și } [qb] < k < [(q+1)b]$$
  Cum $pa \notin \mathbb{Z}$ și $qb \notin \mathbb{Z}$ obţinem $pa < k$ și $qb < k$, prin urmare $p+q < k$.
  Pe de altă parte
  $$k+1 \leq [(p+1)a] < (p+1)a \text{ și } k+1 \leq [(q+1)b] < (q+1)b$$
  Prin urmare $k+1 < p+q+2$.
  Am obţinut $p+q < k < p+q+1$, contradicţie...**2p**

Problema 2. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A. Cercul exînscris triunghiului este tangent ipotenuzei BC în M şi prelungirilor laturilor AB, AC în N, P. Arătaţi că ortocentrul triunghiului MNP aparţine dreptei suport a înălţimii din A a triunghiului ABC.

Soluție:

Barem:

Fie O centrul cercului exînscris triunghiului ABC şi H ortocentrul triunghiului MNP. Fie D piciorul înălţimii din A a triunghiului ABC.

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$ **2p**

$ONAP$ este pătrat; $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$ **1p**

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OM}$ **2p**

$OM \perp BC$; $AH \perp BC$ **1p**

$AD \perp BC$; A, D, H sunt coliniare **1p**

Problema 3. Determinaţi şirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ din intervalul $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ ştiind că şirurile $(\sin a_n)_{n\geq 1}$ şi $(\cos a_n)_{n\geq 1}$ sunt progresii geometrice.

Barem:

$\left(0,\frac{1}{2}\right)\subset\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ deci şirurile $(\sin a_n)_{n\geq 1}$ şi $(\cos a_n)_{n\geq 1}$ au termenii strict pozitivi **2p**

Din $\sin^2 a_n=\sin a_{n-1}\sin a_{n+1}$ şi $\cos^2 a_n=\cos a_{n-1}\cos a_{n+1}$ (adunăm şi scădem membru cu membru egalităţile) obţinem $1=\cos(a_{n+1}-a_{n-1})$ respectiv $\cos 2a_n=\cos(a_{n+1}+a_{n-1})$ **2p**

$a_{n+1}-a_{n-1}\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ implică $a_{n+1}-a_{n-1}=0$ deci $a_{n+1}=a_{n-1},\forall n\geq 2$ **1p**

Deducem $\cos 2a_n=\cos 2a_{n+1}$ şi din $2a_n\in(0,1)\subset\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ obţinem $a_n=a_{n+1},\forall n\geq 1$. Toate şirurile constante verifică ipotezele problemei **2p**

CONCURSUL JUDEȚEAN ”VIOREL SADOVEANU”
Ediția a V-a - 23.05.2026
Matematică
Clasa a X-a

Problema 1.

Demonstraţi că, pentru orice numere reale x, y, z cu $x\ , y, z > 1$, sau $x, y, z \in (0,1)$, este adevărată inegalitatea

$$\frac{log_x y}{2\ +\ log_y x} + \frac{log_y z}{2\ +\ log_z y} + \frac{log_z x}{2\ +\ log_x z} \geq 1$$

Problema 2.

Determinaţi toate funcţiile bijective $f\ :\ \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ care verifică

$$f(f(x) + y) = x + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

Problema 3.

Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe, nereale, distincte două câte două și având același modul.

Să se arate că z_1+z_2z_3, z_2+z_3z_1 , z_3+z_1z_2 sunt reale dacă și numai dacă $z_1z_2z_3$=1.

Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 120 de minute.
Pentru fiecare problemă se acordă 7p.

Barem de notare.

Problema 1.

Demonstraţi că, pentru orice numere reale x, y, z cu $x\ , y, z > 1$, sau $x, y, z \in (0,1)$, este adevărată inegalitatea

$$\frac{log_x\, y}{2\ +\ log_y\, x} + \frac{log_y\, z}{2\ +\ log_z\, y} + \frac{log_z\, x}{2\ +\ log_x\, z} \geq 1$$

Soluţie. Notăm $a\ =\ log_x\, y,\ \ b\ =\ log_y\, z,\ \ c\ =\ log_z\, x$ atunci $abc = 1$.

Deoarece $x, y, z > 1$, sau $x, y, z \in (0,1)$ rezultă că $a, b, c > 0$.

Astfel, inegalitatea devine

$\frac{a}{2+\frac{1}{a}} + \frac{b}{2+\frac{1}{b}} + \frac{c}{2+\frac{1}{c}} \geq 1$ ....……………..2p

Aplicăm inegalitatea lui Titu Andreescu:

$\frac{a}{2+\frac{1}{a}} + \frac{b}{2+\frac{1}{b}} + \frac{c}{2+\frac{1}{c}} = \frac{a^2}{2a+1} + \frac{b^2}{2b+1} + \frac{c^2}{2c+1} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)+3}$….2p

Prin urmare, este suficient să demonstrăm că $\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)+3} \geq 1$. Notăm $S = a + b + c$.

Din $abc = 1$şi din inegalitatea mediilor rezultă

$$S = a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3.$$

Atunci

$\frac{s^2}{2s+3} \geq 1 \Leftrightarrow S^2 - 2S - 3 \geq 0 \Leftrightarrow (S-3)(S+1) \geq 0$ ….3p

Problema 2.

Determinaţi toate funcţiile bijective $f\ \ :\ \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ care verifică

$$f(f(x) + y) = x + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

Rezolvare. Pentru $x = 0$, $f(f(0) + y) = f(y)$. Cum f este injectivă, $f(0) + y = y$, deci $f(0) = 0$. 3p

Pentru $y = 0$, $f(f(x)) = x + f(0) = x$. Deci $f(f(x)) = x$. Punem $y = f(t)$. Obţinem $f(f(x) + f(t)) = x + f(f(t))$. Cum $f(f(t)) = t$, rezultă $f(f(x) + f(t)) = x + t$. Aplicând f, $f(x) + f(t) = f(x + t)$. Deci f este aditivă......3p

Pe $\mathbb{Z}$, $f(n) = n \cdot f(1)$. Notăm $f(1) = k$. Atunci $f(n) = kn$. Din $f(f(x)) = x$ rezultă $k^2 x = x, \quad \forall x \in \mathbb{Z}$. Deci $k^2 = 1$. Prin urmare $f(x) = x$ sau $f(x) = -x$. ...1p

Problema 3.

Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe, nereale, distincte două câte două și având același modul.

Să se arate că z_1+z_2z_3, z_2+z_3z_1 , z_3+z_1z_2 sunt reale dacă și numai dacă $z_1z_2z_3$=1.

Barem

($\Rightarrow$ *geometric*) Fie z_k=$r(cost_k$+$isint_k), k \in \{1,2,3\}$, r>0, și $t_k \in (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi), \forall k \in \{1,2,3\}$ (fiindcă sunt distincte două câte două și nereale).

z_1+$z_2z_3 \in \mathbb{R} \Rightarrow rsint_1$+$r^2sin(t_2$+$t_3)$=0 $\Rightarrow sint_1$+$rsin(t - t_1)$=0, unde t=t_1+t_2+t_3. (1p)

$$sint_1 \neq 0, r>0 \Rightarrow rsint_1 \neq 0$$

Din egalitatea de mai sus obținem

$$sint_1+rsintcost_1 - rsint_1cost=0\text{sau,}$$

după împărțirea cu $rsint_1$,

$$ctgt_1sint=cost - \frac{1}{r}$$

Fiindcă și z_1+$z_3z_1 \in \mathbb{R}$ și z_3+$z_1z_2 \in \mathbb{R}$ obținem

$$ctgt_ksint=cost - \frac{1}{r}, k \in \{1,2,3\}$$

1p)

Presupunem $sint \neq 0$ și obținem $ctgt_1$=$ctgt_2$=$ctgt_3, t_1, t_2, t_3 \in (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi)$. Ținând cont de graficul funcției ctg pe $(0,\pi) \cup (\pi, 2\pi)$, obținem t_1=t_2 sau t_2=t_3 sau t_3=t_1, adică z_1=z_2 sau z_2=z_3 sau z_3=z_1, în contradicție cu ipoteza. Rezultă $sint$=0, ceea ce implică $cost$= $-$ 1 sau $cost$=1. (1p)

Dacă $cost$= $-$ 1, din egalitățile de mai sus, obținem $-1 - \frac{1}{r}$=0, imposibil deoarece r>0. Atunci rămâne $cost$=1. Egalitățile pomenite implică r=1, așadar $z_1z_2z_3$=$r^3(cost$+$isint)$=$1^3(1$+$i \cdot 0)$=1. (1p)

Soluție alternativă:

($\Rightarrow$ *algebric*)

Scăzând primele două relații obținem $(z_1 - z_2)(z_3 - 1) \in \mathbb{R}$,

adică $\overline{(z_1 - z_2)(z_3 - 1)}=(z_1 - z_2)(z_3 - 1)$ (1p)

Notăm $|z_1|=|z_2|=|z_3|=r$, adică $z_k \cdot \overline{z_k}=r^2$. Rezultă $\overline{z_k}=\frac{r^2}{z_k}, k \in \{1,2,3\}$.

Din relația de mai sus,

$$\left(\frac{r^2}{z_1}-\frac{r^2}{z_2}\right)\left(\frac{r^2}{z_3}-1\right)=(z_1 - z_2)(z_3 - 1), \text{ așadar } \frac{r^2(z_2 - z_1)(r^2 - z_3)}{z_1 z_2 z_3}=(z_1 - z_2)(z_3 - 1),$$

$$z_1 - z_2 \neq 0 \text{ și } z_3 \neq r^2$$

Obținem $\frac{z_3-1}{z_3-r^2}=\frac{r^2}{z_1z_2z_3}$ și, analog,

$$\frac{z_2 - 1}{z_2 - r^2}=\frac{r^2}{z_1z_2z_3}; \frac{z_1 - 1}{z_1 - r^2}=\frac{r^2}{z_1z_2z_3},$$

$$\text{de unde } \frac{z_1 - 1}{z_1 - r^2}=\frac{z_2 - 1}{z_2 - r^2}=\frac{z_3 - 1}{z_3 - r^2}.$$

(2p)

Avem $(z_2 - z_1)(r^2 - 1)=0$ și cum $z_1 \neq z_2, r>0$, obținem $r=1$, care implică $z_1z_2z_3=1$. (1p)

($\Leftarrow$) Dacă $z_1z_2z_3=1$ și $|z_1|=|z_2|=|z_3|$, atunci $|z_k|=1, \forall k \in \{1,2,3\}$ și $z_2z_3=\frac{1}{z_1}$.

Obținem $z_1+z_2z_3=z_1+\frac{1}{z_1}=z_1+\frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2}=z_1+\overline{z_1} \in \mathbb{R}$.

Analog $z_2+z_3z_1 \in \mathbb{R}$ și $z_3+z_1z_2 \in \mathbb{R}$. (3p)

CONCURSUL JUDEȚEAN ”VIOREL SADOVEANU”
Ediția a V-a - 23.05.2026
Matematică
Clasa a XI-a

Problema 1. Se consideră ecuația $xe^x + nx = 1$.

a) Demonstrați că ecuația are o unică soluție $x_n \in \mathbb{R}$ și determinați $\lim_{n\to\infty} x_n$;

b) Aflați $l = \lim_{n\to\infty} n x_n$;

c) Calculați limita $\lim_{n\to\infty} n^3 \left(n x_n - l + \frac{l}{n}\right)$.

Problema 2. Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $a + b + c = 3$. Demonstrați că

$$6\big((a^3 + 6a) \cdot \ln a + (b^3 + 6b) \cdot \ln b + (c^3 + 6c) \cdot \ln c\big) \geq 5(a^3 + b^3 + c^3) - 15.$$

Problema 3. Se consideră $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^2 A^T + A^T A^2 = 2 A A^T A$.

Să se demonstreze că $AA^T = A^T A$.

Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 120 de minute.
Pentru fiecare problemă se acordă 7p.

Barem de notare.

Problema 1. Se consideră ecuația $xe^x + nx = 1$.

a) Demonstrați că ecuația are o unică soluție $x_n \in \mathbb{R}$ și determinați $\lim_{n\to\infty} x_n$;

b) Aflați $l = \lim_{n\to\infty} nx_n$;

c) Calculați limita $\lim_{n\to\infty} n^3\left(nx_n - l + \frac{l}{n}\right)$.

(***)

Soluție:

a) Observăm că ecuația nu are soluții pe $(-\infty, 0]$.

...1 pct

Fie $f_n: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = xe^x + nx$.

f_n e strict crescătoare.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\searrow 0} f_n(x) = 0 < 1 \\ f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}} + 1 > 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists!\, x_n \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \text{ a.î. } f_n(x_n) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

...1 pct

b) $nx_n = 1 - x_n e^{x_n} \overset{n\to\infty}{\to} 1$……………………………………………………………**1p**

c)

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n^3\left(nx_n - 1 + \tfrac{1}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty} n^3\left(\tfrac{1}{n} - x_n e^{x_n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} n^2(1 - nx_n e^{x_n}) \\ &= \lim_{n\to\infty} n^2(1 - e^{x_n} + x_n e^{2x_n}) \\ &= \lim_{n\to\infty} (nx_n)^2 \cdot \tfrac{1 - e^{x_n} + x_n e^{2x_n}}{x_n^2} \\ &= \lim_{x\searrow 0} \tfrac{1 - e^x + xe^{2x}}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\searrow 0} \tfrac{-e^x + e^{2x} + x\cdot 2e^{2x}}{2x} \\ &\overset{L'H}{=} \lim_{x\searrow 0} \tfrac{-e^x + 2e^{2x} + 2e^{2x} + 2x\cdot 2e^{2x}}{2} = \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

………………………………**…4** pct

Problema 2. Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $a + b + c = 3$. Demonstrați că

$$6\sum_{cyc} a\,(a^2 + 6)\ln a \geq 5\sum_{cyc} a^3 - 15.$$

(***)

Soluție:

Avem de arătat că $\sum_{cyc}(6a^3\ln a - 5a^3 + 36a\ln a) \geq -15$.

Fie $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 6x^3\ln x - 5x^3 + 36x\ln x$.

f e infinit derivabilă.

…**1** pct

Atunci $f'(x) = 18x^2\ln x - 9x^2 + 36\ln x + 36$, $f''(x)=36x\ln x + \frac{36}{x} = 36x\left(\ln x + \frac{1}{x^2}\right)$.

Fie $g:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \ln x + \frac{1}{x^2}$. Cum $g'(x) = \frac{x^2-2}{x^3}$, $x = \sqrt{2}$ punct de minim global, $g(\sqrt{2}) > 0$ obținem că $f''(x) > 0$ pentru orice $x\epsilon(0,\infty)$, adică f este strict convexă …**4 pct**

Din inegalitatea lui Jensen $\sum_{cyc} f(a) \geq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = 3f(1) = -15$.

…**1** pct

Egalitatea se atinge pentru $a = b = c = 1$.

…**1** pct

Problema 3. Se consideră $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^2A^T + A^TA^2 = 2AA^TA$.

Să se demonstreze că $AA^T = A^TA$.

Robert Pop, Cluj-Napoca

Soluție:

Etapa I: $(AA^T - A^TA)^n = O_n$.

Notăm cu $B = (AA^T - A^TA)$. Atunci:

$$\begin{aligned} A(AA^T - A^TA) &= (AA^T - A^TA)A \\ AB &= BA \\ AB^k &= B^kA \quad \forall\, k \geq 0. \\ B^{k+1} &= B^k \cdot B = B^k(AA^T - A^TA) \\ \mathrm{Tr}\left(B^{k+1}\right) &= \mathrm{Tr}\left(B^kAA^T\right) - \mathrm{Tr}\left(B^kA^TA\right) = 0 \quad \forall k \geq 0 \\ &\Longrightarrow \sigma(B) = \{0\} \Longrightarrow B^n = O_n \end{aligned}$$

…**4** pct

Etapa II: $B = O_n$

Metoda 1: Presupunem că $B^{k+1} = O_n$, pentru un $k \geq 0$ fixat.

$$\begin{aligned} B = B^T \quad &\Longrightarrow O_n = B^{2k} = B^k \cdot B^k = \left(B^k\right)^T \cdot B^k \\ &\Longrightarrow \mathrm{Tr}\left(\left(B^k\right)^T B^k\right) = 0 \\ &\text{dar } \mathrm{Tr}(C^TC) = 0 \Leftrightarrow C = O_n \\ &\Longrightarrow B^k = O_n \end{aligned}$$

Inductiv se ajunge la $B = O_n$.

...3 pct

Metoda 2: $B = B^T \implies B$ este diagonalizabilă.

$$\exists S \in GL_n(\mathbb{R}) : SBS^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$
$$\implies SB^nS^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1^n, \dots, \lambda_n^n) \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$
$$\implies SBS^{-1} = O_n \implies B = O_n$$

...3 pct