CONCURSUL ”VIOREL SADOVEANU”
Ediția a III-a - 15.06.2024

Matematică
Clasa a IV-a

Subiectul I - Pe foaia de concurs scrieți doar răspunsul (5x10p=50p)

1. Valoarea lui a din egalitatea
$247 - 3 \times \{196 : 4 + 2 \times [1 + 5 \times (a : 3 + 1)] - 30\} = 34$ este………..

2. Dacă elevii unei clase se așează câte 2 într-o bancă, atunci un elev rămâne în picioare. Dacă se așează câte 3 în bancă, atunci un elev stă singur în bancă, iar 3 bănci rămân libere. Câți elevi sunt în clasă? Răspuns ....

3. Alina are 25 de bile albe și negre. Ea schimbă cu Maria toate bilele negre, primind pentru fiecare 2 bile negre 5 bile roșii. După un timp, ea schimbă cu Andrei toate bilele roșii, primind pentru fiecare 3 bile roșii 2 bile albe. La sfârșit ea are 33 de bile albe. Câte bile negre a avut inițial Alina? Răspuns………….

4. Cel mai mic număr care are suma cifrelor 60, iar succesorul lui are suma cifrelor 34 este……………….

5. Două numere naturale diferite a și b se numesc “prieteni” dacă numărul b este obținut prin rearanjarea cifrelor numărului a (de exemplu 7730 este “prieten” cu 7037). Atunci 9999977 are un număr de .... “prieteni”.

Subiectul II - Pe foaia de concurs scrieți rezolvările complete (2x20p=40p)

1. a) Din 1000 se scade un număr de 3 cifre. Care este cel mai mare rezultat al scăderii care are suma cifrelor 24? Dar cel mai mic, cu aceleași condiții?
b) Aflați numărul $\overline{abc}$ știind că are loc egalitatea: $\overline{1abc} + \overline{ab} + a = 2024$.

2. Se scriu pe tablă primele numere naturale nenule, $1, 2, 3, \ldots, n$. La primul pas se șterg de pe tablă două numere și se scrie pe tablă suma lor mărită sau micșorată cu 1. (de exemplu, dacă se șterg numerele 2 și 3 pe tablă se scrie 6 sau 4). Apoi se procedează la fel până când pe tablă rămâne un singur număr.
a) Dacă $n = 10$ să se afle care este cea mai mică valoare posibilă ultimului număr rămas pe tablă.
b) Dacă $n = 20$, este posibil ca ultimul număr rămas pe tablă să fie 200?
c) Pentru $n = 6$ să se afle care sunt toate valorile posibile ale ultimului număr rămas pe tablă.

Barem de corectare

Clasa a IV-a

Subiectul I

1. 12
2. 25
3. 12 bile negre
4. 7998999 (se acorda 5p pentru un numar care verifică condiția dar nu este cel mai mic)
5. 20(se acordă 5p pentru raspunsul 21)

Subiectul II

1. a) 24 poate fi scris ca sumă de cifre astfel: $9+9+6, 9+8+7, 8+8+8$ **2p**
   Cum din 1000 se scade un număr de trei cifre, rezultatul scăderii este mai mic sau egal cu 900.......**2p**
   Cel mai mic rezultat al scăderii este 699..**3p**
   Cel mai mare rezultat al scăderii este 897..**3p**

   b) Din egalitate rezultă că $\overline{abc}+\overline{ab}+a=1024$ **2p**

   Dacă cifra $a \leq 7$ atunci suma $\overline{abc}+\overline{ab}+a \leq 885$ ceea ce nu convine, deci $a \geq 8$..........................**2p**
   Dacă cifra $a=8$ avem $11b+c=126 \geq 108$ **2p**
   Pentru $a=9$ rezultă că $11b+c=25$ de unde avem $b=2$ și $c=3$, deci $\overline{abc}=923$.....................**4p**

2. a) Cea mai mică valoare a numărului rămas este atunci când din fiecare sumă se micșorează cu 1. ......**2p**
   Suma inițială a numerelor este 55 ....**2p**
   După cei 9 pași se obține rezulatul 46 ....**4p**

   b) Pentru $n=20$ suma numerelor scrise pe tablă este 210. ....**1p**
   La fiecare pas suma numerelor de pe tablă se mărește sau se micșorează cu 1, deci suma își schimbă paritatea **2p**

   După 19 pași se obține un rezulat impar, deci nu poate fi 200 ....**2p**

   c) Pentru cele 6 numere scrise, care au suma 21, avem 5 pași astfel sumele por fi: **1p**
   mărite la 5 pași, când se obține rezultatul 26 ....**1p**
   mărite la 4 pași și micșorată la un pas, când se obține rezultatul 24 ....**1p**
   mărite la 3 pași și micșorată la doi pași, când se obține rezultatul 22 ....**1p**

mărite la 2 pași și micșorată la trei pași, când se obține rezultatul 20 ....**1p**
mărite la 1 pas și micșorată la patru pași, când se obține rezultatul 18 ....**1p**
micșorată la toți cei 5 pași, când se obține rezultatul 16 ....**1p**

Clasa a V-a

Problema 1.

Aflați numerele prime x, y, z pentru care are loc egalitatea:

$$y^x = \frac{2437 - x^7}{z}$$

Barem

Întrucât $5^7 \geq 2437$ deducem că x nu poate fi decât 2 sau 3……………………………….**1p**

Dacă $x = 2$ rezultă $y^2 = \frac{2309}{z}$, dar 2309 este număr prim, ceea ce ar duce la $y = 1$ care nu convine………………………………………………………………………...**2p**

Dacă $x = 3$ avem $y^3 = \frac{250}{z}$ …………………………………………...**2p**

de unde se obține $z = 2$, iar $y = 5$……………….…………………...**2p**

Problema 2.

a) Arătați că numărul 39^{32} poate fi scris ca suma pătratelor a două numere naturale nenule.

b) În câte moduri poate fi scris numărul 32^{39} ca suma pătratelor a două numere naturale nenule?

Barem

a) $39^{32} = 39^{30} \cdot 3^2 \cdot 169 = 39^{32} \cdot 3^2 \cdot (144 + 25) = (39^{16} \cdot 3 \cdot 12)^2 + (39^{16} \cdot 3 \cdot 5)^2$ **3p**

b) $32^{39} = (2^5)^{39} = 2^{195}$ ……………………………………………………………… **1p**

Fie $2^{195} = a^2 + b^2$ cu a și b numere naturale nenule, cu aceeași paritate. Dacă a și b ar fi impare, atunci suma $a^2 + b^2$ ar fi de forma $4k + 2$ (cu k număr natural), însă 2^{195} este de forma $4k$ (cu k număr natural nenul) și avem contradicție. Deci, a și b trebuie să fie ambele pare: $a = 2a_1$ și $b = 2b_1$ (a_1 și b_1 numere naturale nenule)……………………..………… **1p**
$2^{195} = 4a_1^2 + 4b_1^2$ de unde avem $2^{193} = a_1^2 + b_1^2$. Continuând raționamentul vom obține $2^3 = a_{96}^2 + b_{96}^2$, adică $2 = a_{97}^2 + b_{97}^2$. De aici $a_{97} = b_{97} = 1$ și astfel am dovedit că există o unică scriere a lui 32^{39} ca sumă de două patrate perfecte: $2^{194} + 2^{194}$………….……………**2p**

Problema 3.

Aflați câte numere naturale n scrise în baza zece îndeplinesc în același timp condițiile:

i) produsul cifrelor nenule ale lui n este egal cu 144;

ii) după ce se șterg două cifre ale lui n, numărul rămas este 2024.

Barem

Numărul n conține cifrele numărului 2024 de unde avem că produsul celorlalte două cifre este $\frac{144}{2\cdot2\cdot4}=9$ …. **1p**

Sunt astfel trei cazuri: (1) cifrele lui n sunt $2, 0, 2, 4, 1, 9$; (2) cifrele lui n sunt $2, 0, 2, 4, 3, 3$; (3) cifrele lui n sunt $2, 0, 2, 4, 0, 9$……………….…………………………….………… **1p**

(1) Cu cifrele $2, 0, 2, 4, 1, 9$

Din numărul 2024, pentru a obține numărul n se pune cifra 1 pe oricare din cele cinci poziții, iar cifra 9 pe oricare din cele șase poziții disponibile după așezarea lui 1. Sunt astfel $5\cdot6=30$ de numere ………………..….. **2p**

(2) Cu cifrele $2, 0, 2, 4, 3, 3$

Se procedează ca și în cazul precedent, dar ținând cont de faptul că cifrele 3 sunt identice, vor fi doar 15 numere……….………....……. **1p**

(3) Cu cifrele $2, 0, 2, 4, 0, 9$

În grupările $20024, 20204, 20240$ se inserează cifra 9 în oricare din cele șase poziții disponibile. Se obțin asftel $6\cdot3=18$ numere, plus numărul 902024. În acest caz sunt 19 numere n……….………………………….. **1p**

Așadar sunt $30+15+19=64$ de numere n în condițiile problemei. …. …. **1p**

Clasa a VI-a

Problema 1. Spunem că un număr este *interesant* dacă are patru cifre și oricare două cifre alăturate ale numărului sunt cifre consecutive.(de exemplu numărul 8767 este *interesant*).

a) Să se afle toate numerele *interesante* care au prima cifră egală cu 9.

b) Să se determine câte numere *interesante* există.

c) Să se afle media aritmetică a numerelor *interesante* divizibile cu 9.

Barem

a) Numerele sunt $9898, 9878, 9876$.......**2p**

b) Dacă numărul este de forma $\overline{a(a+1)(a+2)(a+3)}$, atunci a∈{1,2,….,6}, deci avem 6 numere.

$\overline{a(a+1)(a+2)(a+1)}$ →a∈ {1,2, … . ,7}   7 valori

$\overline{a(a+1)a(a+1)}$ →a∈{1,2,….,8}   8 valori

$\overline{a(a+1)a(a-1)}$ →a∈{1,2,….,8}   8 valori

$\overline{a(a-1)a(a+1)}$ →a∈{1,2,….,8}   8 valori

$\overline{a(a-1)a(a-1)}$ →a∈{1,2,….,9}   9 valori

$\overline{a(a-1)(a-2)(a-1)}$ →a∈{2,….,9}   8 valori

$\overline{a(a-1)(a-2)(a-3)}$ →a∈{3,….,9}   7 valori

În total, 61 numere.......**3p**

c) Dacă $\overline{abcd}$ este interesant divizil cu 9, atunci și $\overline{(9-a)(9-b)(9-c)(9-d)}$ este interesant divizibil cu 9. Deci, media aritmetică este $\frac{9999}{2}$ =4999,5.....**2p**

Problema 2. Să se determine numerele naturale nenule x, y, z știind că $(x, y, z) = 1$ și $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$.
S-a notat cu (x, y, z) este cel mai mare divizor comun al celor trei numere.

Barem

Notăm $d = (x, y) \neq 0$, atunci există $a, b \epsilon \mathbb{N}^*$, (a,b)=1 astfel încât $x = d \cdot a, y = d \cdot b$.
Înlocuind în ecuație, obținem $az + bz = d \cdot a \cdot b$.   (1)...........**2p**
Astfel $a|b \cdot z$ dar $(a, b) = 1$, deci $a|z$.
Analog se obține că $b|z$. Deci $[a, b] = a \cdot\ b|z$.
Există un număr natural nenul astfel încât $z = a \cdot b \cdot k$.
Înlocuind în (1), obținem $a^2 \cdot b \cdot k + b^2 \cdot a \cdot k = d \cdot a \cdot b$, de unde $d = a \cdot k + b \cdot k$.
Deci $k|d$.

Astfel, $k|x$, $k|y$, $k|z$, care conduce la $k|(x, y, z)$, deci $k = 1$, $d = a + b$.......**3p**
Pentru numerele prime între ele a și b

$$(x, y, z) = ((x, y), z) = (a + b, a \cdot b)$$

Fie $d' = (x, y, z)$.
Obținem $d'|a^2 + ab$ și $d'|b^2 + ab$, dar $d'|ab$, deci $d'|a^2$ și $d'|b^2 \Rightarrow d'|(a^2, b^2)$ deci $d' = 1$
Deci $x = a(a + b)$, $y = b(a + b)$, $z = ab$…..**2p**

Problema 3. Fie triunghiul echilateral ABC și M un punct pe latura BC. Paralelele duse prin M la laturile AC și AB ale triunghiului intersectează AB și AC în D respectiv E. Notăm cu L și Q mijloacele segmentelor CD și BE. Să se demonstreze că:

a) $\Delta BEM \equiv \Delta DCM$
b) Triunghiul MQL este echilateral.

a) Demonstrarea faptului că △DMB, △ CEM sunt echilaterale.............................**2 p**
Demonstrarea faptului că △ BEM ≡△ DCM...**2 p**
b) Demonstrarea faptului că △MLC≡△ MQE.......................................**1 p**
$\sphericalangle QML = \sphericalangle QME - \sphericalangle LME = \sphericalangle DMC - \sphericalangle LME = \sphericalangle EMC = 60^0$...................**1 p**
MQ≡ML, $\sphericalangle QML = 60^0$, deci △ MQL − echilateral.............................**1 p**

Clasa a VII-a

Problema 1.

a) Să se calculeze $\left[\sqrt{2024+\sqrt{2024}}\right]$

b) Să se determine $n \in \mathbb{N}$ astfel încât numărul $\sqrt{2024+\sqrt{2024-n}}$ să fie rațional.

Barem

a) Cum $44 < \sqrt{2024} < 45$ **(1p)** obţinem $\left[\sqrt{2024+\sqrt{2024}}\right] = 45$. **(2p)**

b) Din $\sqrt{2024+\sqrt{2024-n}} \in \mathbb{Q}$ rezultă că $2024+\sqrt{2024-n} \in \mathbb{Q}$, deci $\sqrt{2024-n} \in \mathbb{Q}$. Rezultă că trebuie să avem $2024-n$ şi $2024+\sqrt{2024-n}$ pătrate perfecte. **(2p).**
Cum $2024 \leq 2024+\sqrt{2024-n} < 2069$ şi singurul pătrat perfect între 2024 şi 2069 este $2025 = 45^2$obţinem $\sqrt{2024-n} = 1$ deci $n = 2023$. **(2p)**

Problema 2.

a) Fie $m, n \in \mathbb{N}$ astfel încât m^2+n^2 este divizibil cu 11. Să se demonstreze că m şi n sunt divizibile cu 11.

b) Demonstraţi că ecuaţia x^2+y^2=2024 nu admite soluţii în mulţimea numerelor raţionale.

Barem

a) Orice număr natural este de forma $m = 11k \pm r$, $r \in \{0,1,2,3,4,5\}$. Prin urmare restul împărţirii lui m^2 la 11 este 0,1,4,9,5 sau 3. **(2p)**
$m^2+n^2 \vdots 11$ dacă şi numa şi dacă m şi n se divid cu 11 **(1p)**

b) Presupunem că ecuaţia admite soluţii rationale. Atunci există $m, n, p \in \mathbb{N}^*$ cu p minim astfel încât $m^2+n^2 = 2024p^2$ **(1p)** De aici $m^2+n^2 \vdots 11$ şi conform punctului a) m şi n sunt divizibile cu 11 **(1p)**. Atunci rezultă succesiv că $m^2+n^2 \vdots 11^2$, $2024p^2 \vdots 11$, $p^2 \vdots 11$, $p \vdots 11$. **(1p)** Prin urmare există $m_1, n_1, p_1 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $m = 11m_1$, $n = 11n_1$, $p = 11p_1$. Evident $p_1 < p$ şi $m_1{}^2 + n_1{}^2 = 2024\,p_1{}^2$, cee ace contrazice minimalitatea lui p. **(1p)**

Problema 3. Fie triunghiul ABC cu $\sphericalangle BAC = 135°$ şi $\sphericalangle ACB = 15°$. Dacă M este mijlocul segmentului BC să se arate $\sphericalangle MAC = 30°$.

Barem

Soluţia 1. $MP \perp BC$, $P \epsilon AB$ **(2p).**
Atunci triunghiul PBC este isoscel, $PB = PC$ şi $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 30°$.
De aici $\sphericalangle ACP = \sphericalangle ACB = 15°$ şi CA este bisectoarea unghiului PCB. Aplicând teorema bisectoarei obţinem $\frac{PA}{AB} = \frac{PC}{BC}$. **(3p)** În triunghiul dreptunghic PMC avem $\sphericalangle C = 30°$ deci $PC = 2PM$. Rezultă $\frac{PA}{AB} = \frac{PM}{MB}$.. Folosind reciproca Teoremei bisectoarei aplicată în triunghiul MBP rezultă că MA este bisectoarea unghiului PMB. Prin urmare $\sphericalangle AMB = 45$şi $\sphericalangle MAC = 30°$(**2p**)

Soluţia 2. Fie $N \epsilon (BC)$ astfel încât $\sphericalangle NAC = 30°$ **(2p)**
Atunci $\triangle NAC \sim \triangle ABC$, deci $\frac{NA}{AB} = \frac{NC}{AC} = \frac{AC}{BC}$ (*)

Fie $AD \perp BC, D \in (BC)$ şi $AD = x$. În triunghiul ABD avem $\sphericalangle ADB = 90°, \sphericalangle ABD = 30°$ deci *AB*=*2x*. Cum $\sphericalangle DAN = \sphericalangle BAC - \sphericalangle BAD - \sphericalangle NAC = 45°$ deduce că triunghiul *AND* este dreptunghic isoscel şi $AN = x\sqrt{2}$. **(3p).** Folosind (*) rezultă că $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{NC}{AC} = \frac{AC}{BC}$ şi $AC = \frac{BC}{\sqrt{2}}$, $NC = \frac{AC^2}{BC} = \frac{BC}{2}$. Prin urmare *N*=*M* şi deci $\sphericalangle MAC = 30°$ ($\mathbf{2p}$).

Clasa a VIII-a

Problema 1.

Se consideră numerele reale pozitive a, b, c pentru care $abc = 1$. Să se demonstreze că:

a) $a + b + c \geq 3$

b) $\frac{a^3}{a^2+2} + \frac{b^3}{b^2+2} + \frac{c^3}{c^2+2} \geq 1$

Barem

a) $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}, deci\ a + b + c \geq 3$ ……………………..3 p

b) $\frac{a^3}{a^2+2} + \frac{b^3}{b^2+2} + \frac{c^3}{c^2+2} = \frac{a^2}{a+2bc} + \frac{b^2}{b+2ac} + \frac{c^2}{c+2ab}$.....1p

Astfel aplicând inegalitatea lui Bergstrom, obținem

$\frac{a^3}{a^2+2} + \frac{b^3}{b^2+2} + \frac{c^3}{c^2+2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+2ab+2ac+2bc}$ (1) ....1 p

Din inegalitatea lui Cauchy, obținem

$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$ și cum a + b + c ≥ 3

$3(a^2+b^2+c^2) \geq 3(a + b + c)$, deci $a^2+b^2+c^2 \geq a + b + c$ (2)..............1 p

a) Din (1) și (2), obținem $\frac{a^3}{a^2+2} + \frac{b^3}{b^2+2} + \frac{c^3}{c^2+2} \geq 1$

..........................1 p

Problema 2.

Fie n un număr natural nenul iar $x_n = \sqrt{n},\ \ y_n = \sqrt{n+1},\ z_n = \sqrt{n+2}$.

a) Pentru $n = 2024$ să se ordoneze crescător numerele $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$.

b) Să se demonstreze că există o infinitate de valori ale lui n pentru care $\{x_n\} < \{y_n\} < \{z_n\}$.

c) Să se arate că pentru orice număr natural nenul n există un număr natural k astfel încât $\{x_n + k\} \cdot (x_n + k)$ să fie număr natural.

S-a notat cu $\{x\}$ partea fracționară a numărului x.

Barem

a) $\{x_{2024}\}=\{\sqrt{2024}\}=\sqrt{2024}$ - 44>0

$\{y_{2024}\}=\{\sqrt{2025}\}=0$

$\{z_{2024}\}=\{\sqrt{2026}\}=\sqrt{2026}$ – 45>0 ……………….1 p

$\sqrt{2026} - \sqrt{2024} = \frac{2}{\sqrt{2026}+\sqrt{2024}} < 1 \rightarrow \sqrt{2026}$ – 45<$\sqrt{2024}$ – 44, deci

$\{y_{2024}\}<\{z_{2024}\}<\{x_{2024}\}$ ....2 p

b) Daca $n=k^2$, $k \in \mathbb{N}^*$, atunci

$n+1<n+2=k^2+2<(k+1)^2$, deci

$$[\sqrt{n}] = [\sqrt{n+1}] = [\sqrt{n+2}] = k$$

$x_n<y_n<z_n$
$[x_n]=[y_n]=[z_n]$
Deci, $\{x_n\}<\{y_n\}<\{z_n\}$ ....2 p

c) Fie $k=[x_n]$, pentru un n fixat.
Atunci $\{x_n+k\}=\{x_n\}=x_n - k\geq 0$
$\{x_n+k\}\cdot(x_n+k)= (x_n-k)\cdot(x_n+k)=x_n^2-k^2=n-k^2\in\mathbb{N}$ ....2 p

Problema 3.

În cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia de lungime a, notăm cu M mijlocul muchiei $A'D'$.

a) Să se afle distanța de la punctul M pa planul $(BC'D)$.
b) Știind că $N\in D'C$ astfel încât $MN\parallel(BC'D)$ să se afle lungimea segmentului ND'.

Barem

a) Fie O și O' centrele pătratelor $ABCD$ și $A'B'C'D'$ iar Q intersecția dreptelor $A'C$ și $C'O$.

Demonstrarea faptului că $A'C\perp(BC'D)$……………**2p**

Demonstrarea faptului că $d\big(A',(BDC')\big)=A'Q=\frac{2}{3}A'C=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$…….**1p**

Fie P mijlocul lui $A'O'$, atunci $MP\parallel(BC'D)$ deci $d\big(M,(BDC')\big)=d\big(P,(BDC')\big)=\frac{3}{4}AQ=\frac{a\sqrt{3}}{2}$…………**2p**

b) Se demonstrează ca $MN\parallel BO_1$ unde O_1 este mijlocul lui CD' …...**1p**

iar din asemănarea triunghiurilor BCO_1 și $MD'N$ obținem că $ND'=\frac{a\sqrt{2}}{4}$……**1p**

Clasa a IX-a
Barem

Problema 1. Se consideră numărul $A = (3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^{2024}$

a) Să se arate că există două șiruri $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1}$ de numere naturale, astfel încât

$$(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^{2n} = x_n + y_n\sqrt{6}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

b) Determinați prima cifră de dinainte și după virgulă în scrierea zecimală a lui A.

Soluție:

a) Inducție matematică **3p**

b)
$$\left(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\right)^{2024} = \left(30 + 12\sqrt{6}\right)^{1012}$$

Fie $z_n = \left(30 + 12\sqrt{6}\right)^n + \left(30 - 12\sqrt{6}\right)^n$

$$= x_n + y_n\sqrt{6} + x_n - y_n\sqrt{6} = 2x_n,$$ **1p**

unde $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1}$sunt șirurile obținute de la a).

Avem: $z_{n+1} = \left(x_n + y_n\sqrt{6}\right)\left(30 + 12\sqrt{6}\right) + \left(x_n - y_n\sqrt{6}\right)\left(30 - 12\sqrt{6}\right)$

$$= 60x_n + 144y_n \Rightarrow$$

$$z_{n+2} = 60x_{n+1} + 144y_{n+1} = 60(30x_n + 72y_n) + 144(12x_n + 30y_n)$$

$$\Rightarrow z_{n+2} + z_n \vdots 10, \forall n \in \mathbb{N}^*$$ **1p**

Cum $z_1 = 60, z_2 = 2(30^2 + 144 \cdot 6) \Rightarrow$

$$u(z_n) = \begin{cases} 0, \text{dacă } n \text{ impar} \\ 8, \text{dacă } n = 4k+2, k \in \mathbb{N} \\ 2, \text{dacă } n \vdots 4 \end{cases} \Rightarrow u(z_{1012}) = 2$$ **1p**

Se arată că $30 - 12\sqrt{6} \in (0,1)$, cu $\left(30 - 12\sqrt{6}\right)^{1012} \cong 0{,}00\ldots$

$$\Rightarrow \left(30 + 12\sqrt{6}\right)^{1012} = \ldots 2 - 0{,}00\ldots = \ldots 1{,}9\ldots$$ **1p**

Problema 2.

a) Demonstrați că $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$, cu egalitate dacă și numai dacă $a = b = c$.

b) Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, arătați că

$$(b^3 + c^3 + b + c)^2 > 4a(a^2 - 3bc - 1)(a - b - c)$$

Soluție: a) Inegalitatea cerută este echivalentă cu

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$, de unde urmează imediat concluzia **2p**

b) Considerăm funcția de gradul al doilea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = a(a^2-3bc-1)x^2 + (b^3+c^3+b+c)x + a - b - c \text{ .... } \mathbf{1p}$$

Avem $f(0) = a - b - c < 0$ și **1p**

$$f(1) = a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) \geq 0 \text{ .... } \mathbf{1p}$$

Dacă triunghiul nu este echilateral ultima inegalitate este strictă. Cum funcția f își schimbă semnul pe $\mathbb{R}$, discriminantul ei este strict pozitiv. **1p**

Dacă triunghiul este echilateral, se verifică prin calcul direct că inegalitatea cerută are loc. **1p**

Problema 3. Arătați că două triunghiuri care au egale perimetrele, razele cercurilor înscrise și câte o înălțime sunt congruente.

Soluție: Avem $p_1 = p_2, r_1 = r_2, h_1 = h_2$

Folosind $r = \frac{S}{p} = \frac{ah}{2p}$

$$r_1 = r_2 \Leftrightarrow \frac{a_1h_1}{2p_1} = \frac{a_2h_2}{2p_2}\text{; deducem } a_1 = a_2 \text{ ....}\mathbf{1p}$$

Din $p_1 = p_2, a_1 = a_2$ avem $b_1 + c_1 = b_2 + c_2$

$${S_1}^2 = {S_2}^2 \Leftrightarrow p_1(p_1-a_1)(p_1-b_1)(p_1-c_1) = p_2(p_2-a_2)(p_2-b_2)(p_2-c_2)$$

$${p_1}^2 - p_1(b_1+c_1) + b_1c_1 = {p_2}^2 - p_2(b_2+c_2) + b_2c_2$$

Obținem $b_1c_1 = b_2c_2$

$$(b_1+c_1)^2 = (b_2+c_2)^2 \Leftrightarrow {b_1}^2 + 2b_1c_1 + {c_1}^2 = {b_2}^2 + 2b_2c_2 + {c_2}^2$$

$$\Leftrightarrow {b_1}^2 + {c_1}^2 = {b_2}^2 + {c_2}^2$$

$$\Leftrightarrow {b_1}^2 - {b_2}^2 = {c_2}^2 - {c_1}^2$$

$$\left.\begin{array}{r}(b_1-b_2)(b_1+b_2) = (c_2-c_1)(c_2+c_1) \\ \text{Dar } b_1+c_1 = b_2+c_2 \Rightarrow b_1-b_2 = c_2-c_1\end{array}\right\} \Rightarrow (b_1-b_2)(b_1+b_2-c_1-c_2) = 0$$

$$\Rightarrow (b_1-b_2)(b_1+b_2-c_1-c_2) = 0$$

I. $b_1 = b_2$; avem $c_1 = c_2$

II. $b_1 + b_2 - c_1 - c_2 = 0$

$$\begin{cases} b_1 - c_1 = c_2 - b_2 \\ b_1 + c_1 = b_2 + c_2 \end{cases}$$

$$b_1 = c_2;\ b_2 = c_1$$

Clasa a X-a
Barem

Problema 1. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ de modul 1. Dacă există $x, y \in \mathbb{R}^*$ pentru care

$$|xa + yb| = |xb + yc| = |xc + yd| = |xd + ya|$$

să se arate că a, b, c, d sunt afixele vârfurilor unui pătrat.

Soluție:
$$\left|x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}\right|^2 = \left|x\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OC}\right|^2$$

$$< x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}, x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} > = < x\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OC}, x\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OC} >$$

(unde cu $< \vec{u}, \vec{v} >$ am notat produsul scalar al vectorilor $\vec{u}, \vec{v}$)

$$\Rightarrow x^2\overrightarrow{OA}^2 + 2xy < \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} > + y^2\overrightarrow{OB}^2 = x^2\overrightarrow{OB}^2 + 2xy < \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} > + y^2\overrightarrow{OC}^2$$

Deoarece $OA^2 = OB^2 = OC^2 = 1$ obținem că:

$$2xy < \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} > = 2xy < \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB} >$$

$$< \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} > = < \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB} >$$

$$\Rightarrow < \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB} > = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{AC}$$

Similar, din $\left|x\overrightarrow{OC} + y\overrightarrow{OD}\right| = \left|x\overrightarrow{OD} + y\overrightarrow{OA}\right|$ obținem că $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{AC}$, iar din $\left|x\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OC}\right| = \left|x\overrightarrow{OC} + y\overrightarrow{OD}\right|$ obținem că $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{BD}$.

Astfel, $AC \cap BD = \{O\}$ și $AC \perp BD$, adică $ABCD$ este romb.

Dar $ABCD$ este înscris în cercul unitate $\Rightarrow ABCD$ este pătrat

Problema 2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \circ f \circ f = f$.

a) Să se demonstreze că f este injectivă dacă și numai dacă f este surjectivă.

b) Dați un exemplu de funcție f care nu este injectivă, are proprietatea din enunț și nu este constantă.

c) Să se arate că există o infinitate de funcții f bijective cu proprietatea din enunț și care nu sunt monotone pe nici un interval din $\mathbb{R}$.

d) Să se demonstreze că există o infinitate de funcții f astfel încât $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq x$.

Soluție:

a) „⇒" Funcția este injectivă astfel: $\forall x \in \mathbb{R}, f\left(f\big(f(x)\big)\right) = f(x)$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f\big(f(x)\big) = x \Rightarrow f \circ f = 1_{\mathbb{R}}$, deci f este și surjectivă 1p

„⇐" Deoarece funcția este surjectivă, $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}\ a.î.\ f(x) = y$.

Așadar, $\forall y \in \mathbb{R}, y = f(x) = f\left(f\big(f(x)\big)\right) = \left(f\big(f(y)\big)\right) \Rightarrow f \circ f = 1_{\mathbb{R}}$, deci f este și injectivă 2p

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = [x]$ sau $f(x) = \begin{cases} x, x \in [-1,1] \\ \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}\setminus[-1,1] \end{cases}$ 1p

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -x + a, x \in \mathbb{Q} \\ x,\ x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$ cu $a \in \mathbb{Q}$ 1p

d) Din ipoteză rezultă că $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(f\big(f(x)\big)\right) \leq f\big(f(x)\big) \leq f(x)$, deci $\forall x \in \mathbb{R}, f\big(f(x)\big) = f(x)$

Astfel obținem că $f/Im(f) = 1_{Im(f)}$ 1p

Funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} a, x \in [a, \infty) \\ x,\ x \in (-\infty, a) \end{cases}$ cu $a \in \mathbb{R}$ sunt soluții 1p

Problema 3. Să se calculeze:

$$S_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{n-k}^{k} \left(-\frac{1}{4}\right)^k$$

Soluție:

$$S_{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n-1}^1 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^1 + \cdots + C_{2n-k}^k \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^k + \cdots + C_{n+1}^{n-1}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} + C_n^n\left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

$$= C_{2n}^0 + (C_{2n-2}^1 + C_{2n-2}^0)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^1 + (C_{2n-3}^2 + C_{2n-3}^1)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + (C_{2n-k-1}^k + C_{2n-k-1}^{k-1})\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^k + \cdots$$
$$+ (C_n^{n-1} + C_n^{n-2})\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} + C_n^n\left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

$$= C_{2n-1}^{0} + C_{2n-2}^{1} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{1} + \cdots + C_{n}^{n-1}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} +$$

$$+\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(C_{2n-2}^{0} + C_{2n-3}^{1} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{1} + \cdots + C_{n}^{n-2}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right)$$

$\Rightarrow S_{2n} = S_{2n-1} + \left(-\frac{1}{4}\right) S_{2n-2}$ 4p

Analog se arată că $S_{2n+1} = S_{2n} + \left(-\frac{1}{4}\right) S_{2n-1}$, deci

S_n satisface relația de recurență $S_n = S_{n-1} + \left(-\frac{1}{4}\right) S_{n-2}, n \geq 2$ 1p

Ecuația caracteristică este $\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0$

cu rădăcina $\lambda_0 = \frac{1}{2}$, deci $S_n = \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^{n} + \beta n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 1p

Din condiția inițială $S_0 = S_1 = 1$, obținem $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}$, deci $S_n = \frac{n+1}{2^n}$ 1p

Clasa a XI-a
Barem

Problema 1. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă, pentru care $f(x) \geq 0$ și, respectiv $f''(x) \leq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Arătați că f este constantă.

Soluție: Presupunem că $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ a.î. $f'(x_0) \neq 0$.

Deoarece f este concavă, graficul lui f se află sub dreapta de ecuație:

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ deci $f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Caz I: $f'(x_0) > 0$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

De unde obținem o contradicție cu $f(x) \geq 0$.

Caz II: $f'(x_0) < 0$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

De unde obținem o contradicție cu $f \geq 0$.

Astfel, $f'(x) = 0$, deci f este constantă.

Problema 2. Fie $A, B \in M_3(\mathbb{C})$ astfel încât A este nilpotentă și

$$AB + BA = A + B.$$

Să se demonstreze că pentru orice $x, y \in \mathbb{C}$ are loc $\det(xA + yB) = 0$.

(O matrice $X \in M_n(\mathbb{C})$ se numește nilpotentă, dacă există $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care $X^k = O_n$.)

Soluție: Deoarece A este nilpotentă, $\sigma(A) = \{0\}$, de unde obținem $A^3 = O_3$

Considerăm $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(x) = \det(A + xB)$

Concluzia problemei este echivalentă cu $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{C}$.

$$A^3 = O_3 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) \leq 2$$

Din inegalitatea lui Frobenius pentru matricele A, A, A obținem că:

(*) $\quad 2\text{rang}(A^2) \leq \text{rang}(A) \Rightarrow \text{rang}(A^2) \in \{0,1\}$

Caz I: $\text{rang}(A^2) = 0$

Din Inegalitatea lui Sylvester pentru matricile A, A obținem:

$$2\,\text{rang}(A) \leq 3 \Rightarrow \text{rang}(A) \in \{0, 1\}$$

Analizăm cele două situații:

a) $\text{rang}(A) = 0 \Rightarrow A = O_3$ și din ipoteză obținem $B = O_3 \Rightarrow f \equiv 0$

b) $\text{rang}(A) = 1$

$$AB + BA = A + B \mid \cdot A$$
$$A \cdot \mid\ ABA = BA$$
$$\Rightarrow O_3 = ABA = BA$$

$$A \cdot \mid AB + BA = A + B$$

$$ABA = AB \Rightarrow AB = O_3$$

$$\Rightarrow A + B = O_3 \Rightarrow B = -A$$

$$f(x) = \det\big((1-x)A\big) = 0, \forall x \in \mathbb{C}$$

Caz II: $\text{rang}(A^2) = 1$

Din (*) avem că $\text{rang}(A) \geq 2$, deci $\text{rang}(A) = 2$

$$AB + BA = A + B \mid \cdot A^2$$

$$ABA^2 = BA^2$$

$$\Rightarrow (A - I_3)BA^2 = O_3$$

$\sigma(A) = \{0\} \Rightarrow \sigma(A - I_3) = \{-1\}$, deci $A - I_3$ este inversabilă

Astfel, $BA^2 = O_3$

Din inegalitatea lui Sylvester pentru matricile B, A^2 obținem:

$$\text{rang}(B) + \text{rang}(A^2) \leq 3$$

$$\Rightarrow \text{rang}(B) \leq 2 \Rightarrow \det(B) = 0$$

Astfel, există $a, b \in \mathbb{C}$ încât $f(x) = ax^2 + bx$.

Aplicând Inegalitatea lui Sylvester pentru matricile $A + B, A^2$ vom obține:

$$\text{rang}(A + B) + \text{rang}(A^2) \leq 3 + \text{rang}(A^3 + BA^2)$$

$$\Rightarrow \operatorname{rang}(A+B) \leq 2$$

$$\Rightarrow \det(A+B) = 0 \Rightarrow f(1) = 0$$

Analog, aplicăm Inegalitatea lui Sylvester pentru $A - B, A^2$ și obținem $f(-1) = 0$.

Astfel, $\begin{cases} f(1) = a + b = 0 \\ f(-1) = a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = 0$

În concluzie, $f \equiv 0$

Problema 3. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ pentru care

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ și } \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n - na_{n+1}) = l \in \mathbb{R}.$$

Demonstrați că șirul $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)_{n\geq 1}$ este convergent și calculați-i limita.

Soluție: Notăm cu $s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

$$\Rightarrow l = \lim_{n\to\infty}[s_n - n(s_{n+1} - s_n)]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[(n+1)s_n - ns_{n+1}]$$

$$= \lim_{n\to\infty} n(n+1)\left(\frac{s_n}{n} - \frac{s_{n+1}}{n+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{s_n}{n} - \frac{s_{n+1}}{n+1}}{\frac{1}{n(n+1)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{s_{n+1}}{n+1} - \frac{s_n}{n}}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}}$$

Din lema Stolz-Cesaro obținem că:

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{s_n}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} s_n$$

Astfel, $(s_n)_{n\geq 1}$ este convergent la l.