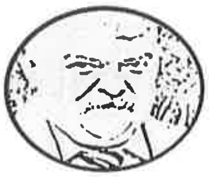


CONCURSUL JUDEŢEAN "VIOREL SADOVEANU"

Ediția a II-a - 20.05.2023

Matematică

Clasa a IV-a

I. Scrieţi doar răspunsul pe foaia de examen (5 x 10p=50p):

1. Se dă numărul a=202320023200023..., suma cifrelor lui a este 2027. Care este ultima cifră a lui a?
2. Dacă şterg ultima cifră a unui număr obţin un număr cu 131 mai mic decât cel iniţial. Scrieţi numărul.
3. La o sală de nunţi se aranjează florile în vaze. Dacă se pun câte 7 flori într-o vază rămân 3 pe dinafară. Dacă se pun 11 flori într-o vază atunci vor fi 7 vaze goale şi o vază cu 4 flori. Scrieţi câte flori sunt?
4. Fie: {[(a-1):(43-3 x 11)] x17 – 5}: 4=3. Cât este 12 x a ?
5. Folosind maxim 9 cifre de 7, orice operaţie aritmetică, paranteze, scrieţi o expresie care este egală cu 281.

II. Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete (2 x 20p):

1. La piaţă un comerciant avea 300 fructe: pere şi cireşe. El schimbă toate cireşele pe pere. La 10 cireşe primeşte 2 pere. După ce termină cireşele constată că are 116 pere.
   a. Câte cireşe au fost la început?
   b. Câte pere au fost la început?
2. Maria primeşte de la bunici o sumă de bani. Ea cheltuie banii astfel: în prima zi cu 5 mai mult decât o optime din ei, a doua zi o cincime din cât i-a mai rămas, a treia zi cu 4 mai puţin decât un sfert din noul rest, a patra zi a cheltuit două cincimi din ce îi rămăsese. A cincea zi avea în portofel 114 lei. Câţi bani a primit de la bunici?

Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.
Toate problemele sunt obligatorii.
10 puncte din oficiu.

CONCURSUL JUDEȚEAN "VIOREL SADOVEANU"

Ediția a II-a - 20.05.2023

Matematică

Clasa a IV-a

I. Scrieți doar răspunsul pe foaia de examen:

1. 2
2. 145
3. 157
4. 132
5. (77-7) x (77:7-7)+7:7281

II. Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete:

1. La piață un comerciant avea 300 fructe: pere și cireșe. El schimbă toate cireșele pe pere. La 10 cireșe primește 2 pere. După ce termină cireșele constată că are 116 pere.
   a. Câte cireșe au fost la început?
   b. Câte pere au fost la început?

   Soluție:

   Notăm cu a numărul de schimburi.

   C=nr. inițial cireșe

   P= nr. inițial pere

   C+P= 300

   Cum dispar cireșele?

   C – 10 x a =0 => C=10 x a 4p

   Câte pere avem după a schimburi?

   P+ 2 x a = 116 ....4p

   8 x a =184

   a=23 ....4p

   Câte cireșe au fost?

   10 x 23 =230 ....4p

   Câte pere au fost?

   300-230=70 ....4p

2. Maria primește de la bunici o sumă de bani. Ea cheltuie banii astfel: în prima zi cu 5 mai mult decât o optime din ei, a doua zi o cincime din cât i-a mai rămas, a treia zi cu 4 mai puțin decât un sfert din noul rest, a patra zi a cheltuit două cincimi din ce îi rămăsese. A cincea zi avea în portofel 114 lei. Câți bani a primit de la bunici?

Soluție:

Reprezentarea corectă 4p

Cât este Rest 3? 4p

114:3 x 5 =190

Cât este Rest 2? 4p

(190 – 4):3 x 4 =248

Cât este Rest 1? 4p

248:4 x 5= 310

Câți bani a primit? 4p

(310+5) : 7 x 8 =360

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BIHOR

MINISTERUL EDUCAȚIEI

CENTRUL JUDEȚEAN DE EXCELENȚĂ BIHOR

CONCURSUL JUDEȚEAN "VIOREL SADOVEANU"

Ediția a II-a - 20.05.2020

Matematică

Clasa a V-a

1. Aflați pentru câte numere naturale n există cifrele nenule a, b, c, d, e, f astfel încât $n = \overline{abc,de(f)} + \overline{bca,ef(d)} + \overline{cab,fd(e)}$.

2. a) Demonstrați că $(4^{24})^1 + (4^{12})^2 + (4^8)^3 + (4^6)^4 = (4^5)^5$

b) Arătați că există o infinitate de numere naturale impare x, y, z, t pentru care: $x^2 + y^3 + z^4 = t^5$

3. Un elev are 94 de zile pentru a se pregăti pentru un concurs de matematică. El rezolvă cel puțin o problemă pe zi dar nu mai mult de 10 probleme pe zi, în total 162 de probleme.

a) Care este numărul maxim de zile în care elevul poate rezolva doar o problemă?

b) Arătați că există cîteva zile consecutive în care el însumează exact 25 de probleme rezolvate.

Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.
Toate problemele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

CLASA a V-a .

1. Aflați pentru câte numere naturale n există cifrele nenule a, b, c, d, e, f astfel încât $n = \overline{abc,de(f)} + \overline{bca,ef(d)} + \overline{cab,fd(e)}$.

Pentru început, să constatăm faptul că cifrele d, e, f nu pot lua niciuna valoarea 9. **(3p)**

Se arată că $n = 111(a+b+c) + \dfrac{d+e+f}{9}$.

Din condiţia ca n să fie natural, avem că $d+e+f$ trebuie să fie un multiplu de 9. Obţinem cazurile $d+e+f = 9$ şi $d+e+f = 18$. **(1p)**

Suma $a+b+c$ poate lua fiecare valoare naturală de la 3 la 27, prin urmare poate lua 25 posibile valori. **(1p)**

Se arată că dacă $111 \cdot k_1 + p_1 = 111 \cdot k_2 + p_2$, unde $k_1, k_2 \in \{3, \ldots 27\}$ şi, respectiv $p_1, p_2 \in \{9, 18\}$ atunci $k_1 = k_2$ şi, respectiv $p_1 = p_2$. **(1p)**

Astfel, valoarea lui n este unic determinată de valoarea lui $a+b+c$, respectiv a lui $d+e+f$. **(1p)**

Deoarece suma $d+e+f$ poate lua 2 posibile valori, pe baza regulii produsului, numărul natural n poate lua $25 \cdot 2 = 50$ de valori posibile. □ **(1p)**

2. **a)** Demonstrați că $(4^{24})^1 + (4^{12})^2 + (4^8)^3 + (4^6)^4 = (4^5)^5$

b) Arătați că există o infinitate de numere naturale impare x, y, z, t pentru care:

$$x^2 + y^3 + z^4 = t^5$$

Barem

a) Calcul direct...... **3p**

b) Găsirea unei soluții $x_0 = 3^{12}, y_0 = 3^8, z_0 = 3^6, t_0 = 3^5$,

$$x_0^2 + y_0^3 + z_0^4 = t_0^5.$$

Acum, înmulţim această ultimă relaţie cu $(2k+1)^{60}$, unde k este un număr natural nenul.

Pentru un $k \in \mathbb{N}$ oarecare facem notaţiile:

$$x_k = x_0(2k+1)^{30},\ y_k = y_0(2k+1)^{20},\ z_k = z_0(2k+1)^{15},\ t_k = t_0(2k+1)^{12}.$$

Astfel, obţinem numere impare care verifică $x_k^2 + y_k^3 + z_k^4 = t_k^5$. **(2p)**

particulare **2p**

4. . Un elev are 94 de zile pentru a se pregăti pentru un concurs de matematică. El rezolvă cel puțin o problemă pe zi dar nu mai mult de 10 probleme pe zi, în total 162 de probleme.

a) Care este numărul maxim de zile în care elevul poate rezolva doar o problemă?

b) Arătați că există câteva zile consecutive în care el însumează exact 25 de probleme rezolvate

Barem

a) Presupunem că elevul ar rezolva în fiecare zi exact o problemă. atunci ar rămâne 162-94=68 de probleme pe care ar trebui să le rezolve într-un număr cât mai mic de zile. **(1p)**.
Cum $9 \cdot 7 < 68 < 9 \cdot 8$ nr. Minim de zile în care rezolva aceste probleme este 8. **(1p)**
Deci elevul poate rezolva exact o problem în maxim 94-8=86 de zile. **(2p)**

b) Fie a_i numărul de problem rezolvate de elev până în ziua i inclusiv. Atunci $1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_{94} = 162$ **(1p)** de unde avem $26 \leq a_1 + 25 < a_2 + 25 < \ldots < a_{94} + 25 = 187$.**(1p)** Printre cele 188 de numere $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{94}, a_1 + 25, a_2 + 25, \ldots, a_{194} + 25$ există două numere egale. De aici există i, j astfel încât $a_i = a_j + 25$. Atunci elevul a rezolvat exact 25 de probleme în zilele $j + 1, j + 2, \ldots, i$. **(1p)**

CONCURSUL JUDEŢEAN "VIOREL SADOVEANU"

Ediția a II-a - 20.05.2023

Matematică

Clasa a VI-a

1. Preţul unui telefon este de 300 euro. În cadrul unei promoţii, telefonul s-a ieftinit. Într-un magazin, vânzările acestui telefon au crescut cu $40\,\%$, iar încasările au crescut cu $19\,\%$. Care este noul preţ al telefonului?

2. Un număr natural are proprietatea $\mathscr{P}$ dacă mulţimea divizorilor săi naturali formează o proporţie.

   a) Găsiţi un număr natural n care are proprietatea $\mathscr{P}$ astfel ca suma divizorilor săi să fie 48.

   b) Arătaţi că nu există niciun număr natural cu proprietatea $\mathscr{P}$ astfel ca suma divizorilor săi să fie 105.

3. În triunghiul ABC ascuțitunghic cu $\widehat{B} = 45°$, fie $AN \perp BC, N \in (BC)$, M un punct pe segmenetul NC şi F mijlocul segmentului AC. Considerăm G pe segmentul MF astfel încât $MG = 2GF$, $CG \cap AM = \{T\}$ şi $ME \perp AB, E \in AB$. Calculaţi $\widehat{ETN}$.

Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.
Toate problemele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

CLASA a VI-a.

1. Prețul unui telefon este de 300 euro. În cadrul unei promoții, telefonul s-a ieftinit. Într-un magazin, vânzările acestui telefon au crescut cu 40%, iar încasările au crescut cu 19%. Care este noul preț al telefonului?

Barem

Notăm cu x numărul telefoanelor vândute înainte de ieftinire. După promoție se vând $x+\frac{40}{100}\cdot x=\frac{7x}{5}$ telefoane **(3p)**, iar suma încasată este $300\cdot x+\frac{19}{100}\cdot 300x=357x$. **(2p)** Dacă noul preț al telefonului este *t*, atunci $\frac{7x}{5}\cdot t=357x$, de unde $t=255$ euro. **(2p)**

2. Un număr natural are proprietatea $\wp$ dacă mulțimea divizorilor săi formează o proporție.

a) Arătați că există un număr natural n care are proprietatea $\wp$ astfel ca suma divizorilor săi să fie 48.

b) Arătați că nu există niciun număr natural cu proprietatea $\wp$ astfel ca suma divizorilor săi să fie 105.

Barem

Pentru ca mulțimea divizorilor lui n să formeze o proporție, este necesar ca n să aibă doar 4 divizori. Numerele care au doar 4 divizori sunt de forma $p\cdot q$ sau p^3, p,q fiind prime. Divizorii acestor numere formează o proporție deoarece $\frac{1}{p}=\frac{q}{pq}$ și $\frac{1}{p}=\frac{p^2}{p^3}$. Suma divizorilor acestor numere este $1+p+q+pq=(1+p)(1+q)$ respectiv $1+p+p^2+p^3=(1+p)(1+p^2)$. **(3p) a** Avem $(1+p)(1+q)=48$, de unde obținem $p=5,q=7$ și $n=35$. **(2p) b** Presupunem că există un număr cu proprietatea cerută; atunci avem $(1+p)(1+q)=105$ sau $(1+p)(1+p^2)=105$. Suma divizorilor este un număr impar doar dacă $p=2$; obținem $n=8$ și atunci suma divizorilor este 15. **(2p)**

3. În triunghiul ABC cu $\widehat{B}=45°$, fie $AN\perp BC, N\in(BC), M\in(NC)$ și F mijlocul segmentului $[AC]$. Considerăm $G\in(MF)$ astfel încât $MG=2GF$, $CG\cap AM=\{T\}$ și $ME\perp AB, E\in AB$. Calculați $\widehat{ETN}$..

Barem

În $\triangle AMC$, MF este mediană, iar din $MG = 2GF$ rezultă că G este centru de greutate, de unde CG mediană, adică T este mijlocul segmentului $[AM]$. **(2p)** În $\triangle ANM$ avem $\widehat{N} = 90°$, NT mediană, deci $NT = \frac{1}{2}AM$. În $\triangle AEM$ avem $\widehat{E} = 90°$, ET mediană, deci $ET = \frac{1}{2}AM$. **(2p).** Fie $x = \widehat{TME}$. Din $\triangle BEM$ dreptunghic isoscel rezultă $\widehat{EMB} = 45°$. Din $\triangle MTN$ isoscel obținem $\widehat{MTN} = 90° - 2x$. Din $\triangle ETM$ isoscel rezultă $\widehat{ETM} = 180° - 2x$; din cele două egalități avem $\widehat{ETN} = 90°$. **(3p)**

CONCURSUL JUDEȚEAN "VIOREL SADOVEANU"
Ediția a II-a - 20.05.2023
Matematică
Clasa a VII-a

1.
a) Determinați $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât
$$(x+2)^2 + 5x + 11 = y^2$$
b) Numărul $N = 10...01$ are 2023 zerouri. Demonstrați că N^2 se poate scrie ca sumă a două pătrate perfecte nenule.

2. Fie $A_n = \{x \in \mathbb{R}^* \,|\, [x] = n \cdot \{x\}\}$ unde n este un număr natural nenul, $n \leq 2023$.
a) Să se determine mulțimea A_3.
b) Să se afle pentru câte valori ale lui n, suma elementelor mulțimii A_n este un număr natural divizibil cu 4.

3. Se consideră un paralelogram $ABCD$ cu centrul O. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor BO și CD. Dacă triunghiurile ABC și AMN sunt asemenea, demonstrați că $ABCD$ este pătrat.

Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.
Toate problemele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

1. CLASA a VII – a .

a) Determinați $x, y\epsilon\mathbb{N}$ astfel încât

$$(x+2)^2 + 5x + 11 = y^2$$

b) Numărul $N = 10...01$ are 2023 zerouri. Demonstrați că N^2 se poate scrie ca sumă a două pătrate perfecte nenule.

Barem

a) Deoarece $x, y\epsilon\mathbb{N}$ avem

$$(x+2)^2 < y^2 < (x+5)^2 = (x+2)^2 + 6x + 21$$

Deci $y\epsilon\{x+3, x+4\}$ **(2p)**

Dacă $y = x+3$ obținem $x = -2$ care nu convine. .**(1p)**

Dacă $y = x+4$ obținem $x = 1$ și $y = 5$. (1p)

b) Avem $N = k^2 + 1$ unde $k = 10^{1012}$.**(1p)**

Atunci $N^2 = (k^2+1)^2 = (k^2-1)^2 + (2k)^2$.**(2p)**

4. Fie $A_n = \{x \in \mathbb{R}^* | [x] = n \cdot \{x\}\}$ unde n este un număr natural nenul, $n \leq 2023$.

5. Fie $A_n = \{x \in \mathbb{R}^* | [x] = n \cdot \{x\}\}$ unde n este un număr natural nenul, $n \leq 2023$.

c) Să se determine mulțimea A_3.

d) Să se afle pentru câte valori ale lui n, suma elementelor mulțimii A_n este un număr natural divizibil cu 4.

Să se determine mulțimea A_3.

e) Să se afle pentru câte valori ale lui n, suma elementelor mulțimii A_n este un număr natural divizibil cu 4.

Barem

a) Pentru $n > 1$ dacă $[x] = k$ atunci $\{x\} = \frac{k}{n}$ Cum $n \cdot \{x\} \in [0, n) \cap \mathbb{Z}$, $k \in \{0,1, ..., n-1\}$.

Dar x este nenul deci $A_n = \{k + \frac{k}{n} \mid k \in \{1,2, ..., n-1\}\}$ **2p**

Determinarea lui A_3.........**(1p)**

B) Suma elementelor este (n-1)(n+1)/2..........**2p**

Demonstreaza ca n trebuie sa fie impar **1p**

1012 numere..........**1p**

2. Se consideră un paralelogram $ABCD$ cu centrul O. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor BO și CD. Dacă triunghiurile ABC și AMN sunt asemenea, demonstrați că $ABCD$ este pătrat.

Barem

Din Δ ABC~ Δ AMN, rezultă că $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ și $\sphericalangle$MAN $\equiv\sphericalangle$ BAC. **1p**

De aici deducem că ∢MAB ≡∢ NAC. Deci, Δ BAM~ Δ CAN, adică $\frac{AB}{AC}=\frac{AM}{AN}=\frac{BM}{CN}$ şi ∢ABM ≡∢ NCA . **2p**

Dar ∢BDC ≡∢ NCA , deci ABCD este dreptunghi. **1p**

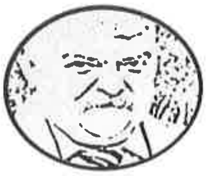
Deoarece BM=$\frac{1}{4}BD=\frac{1}{4}AC$ şi $CN=\frac{1}{2}DC$ rezultă că $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{2AB}$, adică $2AB^2=AC^2$ şi $AC^2=BC^2+AB^2$ **2p**

Prin urmare, BC= AB. Deci patrulaterul ABCD este pătrat. **1p**

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BIHOR

MINISTERUL EDUCAŢIEI

CENTRUL JUDEŢEAN DE EXCELENŢĂ BIHOR



CONCURSUL JUDEŢEAN "VIORAL SADOVEANU"

Ediţia a II-a - 20.05.2023

Matematică

Clasa a VIII-a

1. Să se arate că dacă $a, b, c > 0$ şi $a + b + c = 3$ atunci

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geq 3$$

2. Fie x şi y două numere naturale astfel încât $x > y$. Să se demonstreze că dacă x are 5 divizori naturali, iar y are 3 divizori naturali, atunci $x + y$ este un număr compus.

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu $AB = 4\ cm$ şi punctele M şi E astfel încât M să fie mijloc al segmentelor $C'D'$ şi AE. Să se calculeze distanţa de la E la planul $(AB'C)$.

Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.
Toate problemele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

Clasa a VIII-a

1. Să se arate că dacă $a, b, c > 0$ şi $a + b + c = 3$ atunci

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geq 3$$

Barem

Din inegalitatea mediilor se obţine că pentru orice $x, y > 0$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ **(2p)**

de unde rezultă:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right) \geq 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \textbf{(3p)}$$

Iar din inegalitatea lui Titu Andreescu obtinem

$$2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geq 2 \cdot \frac{9}{2(a+b+c)} = 3 \qquad \textbf{(2p)}$$

2. Fie x şi y două numere naturale astfel încât $x > y$. Să se demonstreze că dacă x are 5 divizori naturali, iar y are 3 divizori naturali, atunci $x + y$ este un număr compus.

Barem

$x = p^4, y = q^2, p, q$ numere prime.......**1p**
Dacă x şi y au aceeaşi paritate atunci $x + y > 2$ este un număr par deci este un număr compus.....**2p**
Dacă x şi y nu au aceeaşi paritate avem două cazuri:

1. Dacă x e par, $p = 2, q =$impar. Cum $x > y \Rightarrow 16 > q^2$deci $q = 3$ şi $x + y = 25$ e număr compus......**2p**
2. Dacă y e par, $q = 2, p = impar$. Astfel $p > 2$ deci $p(p-2)+2 > 2$
   În acest caz $x + y = p^4 + 4 = (p^2 - 2p + 2)(p^2 + 2p + 2)$ e compus....**2p**

4. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu $AB = 4\ cm$ şi punctele M şi E astfel încât M să fie mijloc al segmentelor $C'D'$ şi AE. Să se calculeze distanţa de la E la planul $(AB'C)$.

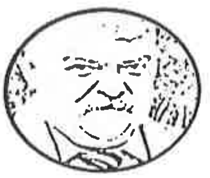
Barem

Fie $E' = pr_{(AB'C)}E$ şi $M' = pr_{(AB'C)}M$. Deoarece A, M şi E sunt coliniare, rezultă că A, M' şi E' sunt coliniare şi M' este mijlocul segmentului AE' . Atunci avem $EE' = 2MM'$. **2p**
Fie $MN \parallel A'C'$, $N \in B'D'$ $\Rightarrow MN \parallel AC \Rightarrow MN \parallel (AB'C)$. Atunci $MM' = d\left(M,(AB'C)\right) = d\left(N,(AB'C)\right)$ **2p**

Deoarece $AC \perp (BDD'), AC \subset (AB'C)$ rezultă $(AB'C) \perp (BDD')$ și cum $(AB'C) \cap (BDD') = B'O$, avem $d\left(N, (AB'C)\right) = d(N, B'O)$......**2p**

$\mathcal{A}_{NOB'} = 6\sqrt{2}$ și cum $B'O = 2\sqrt{6}$ obținem $d(N, B'O) = 2\sqrt{3}$

Atunci $d\left(E, (AB'C)\right) = 4\sqrt{3}\ cm$........**1p**



CONCURSUL JUDEȚEAN "VIOREL SADOVEANU"
Ediția a II-a - 20.05.2020
Matematică
Clasa a IX-a

1. Să se demonstreze că dacă $a, b > 0$ atunci

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{ab}{a^2+b^2}\geq\frac{5}{2}$$

2. Fie $A_n = \{x \in \mathbb{R}^* \mid [x] = n \cdot \{x\}\}$ unde n este un număr natural nenul.

a. Să se afle numărul elementelor mulțimii A_{2023}.

b. Să se demonstreze că există o infinitate de valori naturale ale lui n pentru care mulțimea $B_n = \{\sqrt{x} \mid x \in A_n\}$ conține cel puțin un număr rațional.

3. Fie ABC un triunghi echilateral şi punctele $M\epsilon(BC)$ şi $N\epsilon(CA)$ astfel încât $\frac{BM}{BC}=\frac{CN}{CA}=k$.
În exteriorul său se construieşte triunghiul isoscel DBC având $m(\measuredangle BDC) = 120^\circ$.
Sa se determine k astfel încât punctele D, M şi N să fie coliniare.

Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.
Toate problemele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

CLASA a IX-a. – BAREM.

1. Să se demonstreze că dacă $a, b, c > 0$ atunci

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{ab}{a^2+b^2}\geq\frac{5}{2}$$

Barem

Fie $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$. Atunci $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}=t^2-2$ și $\frac{ab}{a^2+b^2}=\frac{1}{t}$ **(2p)**

Inegalitatea devine $t^2-2+\frac{1}{t}\geq\frac{5}{2}\Leftrightarrow(t-2)(2t^2+4t-1)\geq 0$ **(3p)**

Cum $t\geq 2$ **(1p)** inegalitatea de mai sus este adevărată. **(1p)**

2. Fie $A_n=\{x\in\mathbb{R}^*|[x]=n\cdot\{x\}\}$ unde n este un număr natural nenul.

a. Să se afle numărul elementelor mulțimii A_{2023}.

b. Să se demonstreze că există o infinitate de valori naturale ale lui n pentru care mulțimea $B_n=\{\sqrt{x}\,|\,x\in A_n\}$ conține cel puțin un număr rațional.

Barem

a) Pentru $n>1$ dacă $[x]=k$ atunci $\{x\}=\frac{k}{n}$ Cum $n\cdot\{x\}\in[0,n)\cap\mathbb{Z}$, $k\in\{0,1,...,n-1\}$.
Dar x este nenul deci $A_n=\{k+\frac{k}{n}\,|\,k\in\{1,2,...,n-1\}\}$ **2p**
Cum două numere care au partea întreagă diferită sunt diferite, A_{2023} are 2022 elemente.....**1p**

b) Fie $n=4p^2+4p$, atunci pentru $k=p^2+p<n$ avem $\sqrt{k+\frac{k}{n}}=\sqrt{\frac{k(n+1)}{n}}=\sqrt{\frac{(p^2+p)(2p+1)^2}{4(p^2+p)}}=\frac{2p+1}{2}\in\mathbb{Q},\forall p$- natural nenul..........**3p**
Deci avem o infinitate de valori ale lui n de forma $4p^2+4p$ pentru orice p- natural nenul pentru care $B_n$conține cel puțin un număr rational.....**1p**

3. Fie ABC un triunghi echilateral și punctele $M\epsilon(BC)$ și $N\epsilon(CA)$ astfel încât $\frac{BM}{BC}=\frac{CN}{CA}=k$.
În exteriorul său se construiește triunghiul isoscel DBC având $m(\measuredangle BDC)=120^\circ$.
Sa se determine k astfel încât punctele D, M și N să fie coliniare.

Barem

Fie O centrul triunghiului ABC. Atunci ΔBDO este echilateral, punctele A, O și D sunt coliniare, $DA=2DO$, iar patrulaterul BDCO este romb.

Prin urmare $\overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{DO} = 2\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC}$. **(1p)**

Se obţine:

$\overrightarrow{DM} = (1 - k)\overrightarrow{DB} + k\overrightarrow{DC}$, **(2p)**

$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + k\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DC} + k(\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}) = 2k\overrightarrow{DB} + (k + 1)\overrightarrow{DC}$ **(2p)**

D, M, N sunt coliniare dacă şi numai dacă $\frac{1-k}{2k} = \frac{k}{k+1}$, de unde obţinem $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **(2p)**

CONCURSUL JUDEŢEAN "VIOREL SADOVEANU"

Ediţia a II-a - 20.05.2020

Matematică

Clasa a X-a

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale sistemul:

$$\begin{cases} 2\cdot(3^x+4^x)=5^x\cdot y \\ 2\cdot(3^y+4^y)=5^y\cdot z \\ 2\cdot(3^z+4^z)=5^z\cdot x \end{cases}$$

2. Dacă $a, b, c, d > 1$ sunt numere reale, arătaţi că:

$$log_{bc^2d^3}\, a + log_{cd^2a^3}\, b + log_{da^2b^3}\, c + log_{ab^2c^3}\, d \geq \frac{2}{3}$$

3. Determinaţi numerele complexe z astfel încât $M_1M_2M_3M_4$ să fie un patrulater inscriptibil, ştiind că punctele M_1, M_2, M_3, M_4 au afixele afixe z, z^2, z^3, z^4 .

Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.
Toate problemele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

1. Rezolvaţi în mulţimea num $\begin{cases} 2\cdot(3^x+4^x)=5^x\cdot y \\ 2\cdot(3^y+4^y)=5^y\cdot z \\ 2\cdot(3^z+4^z)=5^z\cdot x \end{cases}$

Barem:

1) $x=y=z=2$ este soluţie 1p

2) Fie $x>2$

Scriem sistemul sub forma:

$$\begin{cases} 2\left(\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x\right)=y \\ 2\left(\left(\frac{3}{5}\right)^y+\left(\frac{4}{5}\right)^y\right)=z \\ 2\left(\left(\frac{3}{5}\right)^z+\left(\frac{4}{5}\right)^z\right)=x \end{cases}$$ 2p

$\Rightarrow y<2\Rightarrow z>2\Rightarrow x<2$ - contradicţie 2

3) Fie $x<2$ – se tratează analog ca 2).

Deci $x=y=z=2$ este soluţia sistemului. 2p

2. Dacă $a,b,c,d>1$ sunt numere reale, arătaţi că:

$$log_{bc^2d^3}\,a+log_{cd^2a^3}\,b+log_{da^2b^3}\,c+log_{ab^2c^3}\,d\geq\frac{2}{3}$$

Barem.

Notând $lga=x, lgb=y, lgc=z, lgd=t$, rezultă că $x,y,z,t>0$, ...1p

iar inegalitatea devine: $\Sigma\frac{x}{y+2z+3t}\geq\frac{2}{3}$ (sumă ciclică) 1p

$\Rightarrow \Sigma\frac{x}{y+2z+3t}=\Sigma\frac{x^2}{xy+2xz+3xt}\geq\frac{(x+y+z+t)^2}{4(xy+xz+....)}$. 2p

Arătăm că

$(x+y+z+t)^2\geq\frac{8}{3}(xy+xz+\ldots.)$ 1p

$\Leftrightarrow 3\Sigma x^2\geq 2(xy+xz+\ldots.)\Leftrightarrow \Sigma(x-y)^2\geq 0$ .... 2 p

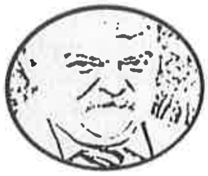
3. Determinați numerele complexe z astfel încât $M_1M_2M_3M_4$ să fie un patrulater inscriptibil, știind că punctele M_1, M_2, M_3, M_4 au afixele afixe z, z^2, z^3, z^4 .

Fie $z \neq 0$ cu proprietatea din enunț. Punctele $M_1(z), M_2(z^2), M_3(z^3), M_4(z^4)$ sunt conciclice $\Leftrightarrow \frac{z-z^2}{z^4-z^2} : \frac{z-z^3}{z^4-z^3} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \frac{(1+z)^2}{z} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}^*$. **(2p)**

Din $\overline{z} + \frac{1}{\overline{z}} = z + \frac{1}{z}$ se obține $(z^2 - |z|^2)(|z|^2 - 1) = 0$ și $z(z - \overline{z})(|z|^2 - 1) = 0$. **(2p)**

Dacă $z = \overline{z}$ rezultă că $z \in \mathbb{R}$ și atunci cele patru puncte ar fi coliniare, imposibil. Deci $|z| = 1$. **(1p)** Fie $t = arg\, z \in 0,2\pi)$. Analizăm mai multe cazuri. Dacă $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, avem $0 < t < 2t < 3t < 4t < 2\pi$ și se obține $0 < arg\, z < arg\,(z^2) < arg\,(z^3) < arg\,(z^4) < 2\pi$. Dacă $t \in \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\Big)$, atunci avem ordinea $0 < 4t - 2\pi < t < 2t < 3t < 2\pi$ și $0 \leq arg\,(z^4) < arg\, z < arg\,(z^2) < arg\,(z^3) < 2\pi$. Dacă $t \in \frac{2\pi}{3}, \pi\Big)$, din $0 \leq 3t - 2\pi < t \leq 4t - 2\pi < 2t < 2\pi$ rezultă $0 \leq arg\,(z^3) < arg\, z \leq arg\,(z^4) < arg\,(z^2) < 2\pi$. Dacă $t \in \pi, \frac{4\pi}{3}\Big)$ avem $0 < 2t - 2\pi \leq 4t - 4\pi < t \leq 3t - 2\pi < 2\pi$ și $0 < arg\,(z^2) \leq arg\,(z^4) < arg\, z \leq arg\,(z^3) < 2\pi$. Dacă $t \in \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\Big)$, atunci $0 \leq 3t - 4\pi < 2t - 2\pi < t \leq 4t - 4\pi < 2\pi$ și astfel obținem $0 \leq arg\,(z^3) < arg\,(z^2) < arg\, z \leq arg\,(z^4) < 2\pi$, iar pentru $t \in \frac{3\pi}{2}, 2\pi\Big)$ rezultă ordinea $0 \leq 4t - 6\pi < 3t - 4\pi < 2t - 2\pi < t < 2\pi$ și $0 \leq arg\,(z^4) < arg\,(z^3) < arg\,(z^2) < arg\, z < 2\pi$.

Deci $z = cos\, t + i\, sin\, t$, $t \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right)$. **(2p)**



CONCURSUL JUDEȚEAN "VIOREL SADOVEANU"

Ediția a II-a - 20.05.2023

Matematică

Clasa a XI-a

1. Este posibilă egalitatea $AB - BA = A$, unde $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, matricea A fiind inversabilă? Justificați.

2. Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}, a < b$ o funcție cu proprietatea lui Darboux, iar M mulțimea zerourilor reale ale lui f. Dacă $sgn\left(f(a)\right) = sgn\left(f(b)\right) \in \{-1,1\}$ și $card(M) = 2n + 1, n \in \mathbb{N}$, demonstrați că f are cel puțin un punct de extrem local care aparține lui M.

3. Să se determine funcțiile derivabile $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ pentru care $f'(x^3) = f(x)$, $\forall x \in [0, \infty)$ și $f(0) = 0$.

Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.
Toate problemele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

CLASA a XI-a

1. Este posibilă egalitatea $AB - BA = A$, unde $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, matricea A fiind inversabilă? Justificaţi.

Barem

Prin reducere la absurd, presupunem că egalitatea este posibilă. Din $AB - BA = A$ rezultă $ABA^{-1} - BAA^{-1} = AA^{-1}$ **(2p)**, de unde avem $ABA^{-1} - B = I_2$. Atunci $tr(ABA^{-1}) - tr(B) = 2$, adică $tr(A^{-1}AB) - tr(B) = 2$ **(4p)** sau $tr(B) - tr(B) = 2$, contradicţie. Deducem că nu este posibilă egalitatea din enunţ. **(1p)**

2. Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}, a < b$ o funcţie cu proprietatea lui Darboux, iar M mulţimea zerourilor reale ale lui f. Dacă $sgn\left(f(a)\right) = sgn\left(f(b)\right) \in \{-1,1\}$ şi $card(M) = 2n + 1, n \in \mathbb{N}$, demonstraţi că f are cel puţin un punct de extrem local care aparţine lui M.

Barem

Fie $M = \{x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}\}$, cu $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{2n+1} < b$. Să presupunem că niciunul dintre elementele mulţimii M nu este punct de extrem local al lui f. **(1p)** Pentru orice $V \in V_{x_i}$ există $x, y \in V \cap [a, b]$ astfel încât $0 = f(x_i) < f(x)$ şi $0 = f(x_i) < f(y), i = \overline{1,2n+1}$. Prin urmare, f îşi schimbă semnul de fiecare dată când se anulează. **(3p)** Cum f are proprietatea lui Darboux, obţinem că îşi schimbă semnul exact de $2n + 1$ ori. **(1p)** Aşadar după ultima schimbare de semn, funcţia va avea semnul $(-1)^{2n+1} sgn\left(f(a)\right) =- sgn\left(f(a)\right)$. **(1p)** Deducem că $sgn\left(f(a)\right) =- sgn\left(f(a)\right)$, ceea ce contrazice ipoteza. Deci presupunerea făcută a fost falsă. **(1p)**

3. Fie ABC un triunghi echilateral şi punctele $M\epsilon(BC)$ şi $N\epsilon(CA)$ astfel încât $\frac{BM}{BC} = \frac{CN}{CA} = k$. În exteriorul său se construieşte triunghiul isoscel DBC având $m(\sphericalangle BDC) = 120^{\circ}$. Sa se determine k astfel încât punctele D, M şi N să fie coliniare.

Barem

Se observă că funcţia nulă este soluţie. **(1p)** Fie f o funcţie nenulă ce verifică condiţiile cerute. Din ipoteză avem $f'(x) = f(\sqrt[3]{x}), \forall x \in [0, \infty)$, deci f este crescătoare pe $[0, \infty)$. **(1p)** Cum funcţia este nenulă şi $f \geq 0$, rezultă că există $x_0 > 0$ astfel încât $f(x_0) > 0$. Alegem $a = sup\{x | f(x) = 0\}$. Deoarece f este nenulă, avem $a \neq + \infty$ şi atunci $a \in (0, \infty)$. Din continuitate şi monotonie deducem că $f(x) = 0$ pe $[0, a]$ şi $f(x) > 0$ pe (a, ∞). **(2p)** Aplicând Teorema lui Lagrange funcţiei f pe intervalul $[a, a + 1]$ deducem că există $c \in (a, a + 1)$ astfel încât $f(a + 1) = f'(c)$, deci $f(a + 1) = f(\sqrt[3]{c})$. Funcţia fiind crescătoare, din $\sqrt[3]{c} < \sqrt[3]{a+1} < a+1$ deducem că f este constantă pe intervalul $[\sqrt[3]{c}, a+1]$, deci f' este nulă pe acel interval. **(2p)** Atunci $f'(a+1) = 0 = f'(0)$ şi cum f' este crescătoare (compunere de funcţii crecsătoare), rezultă că $f' = 0$ pe $[0, a+1]$. Atunci $f'(c) = 0 = f(a+1)$. Cum $f(a+1) > 0$ (din alegerea lui a şi f crescătoare), se obţine o contradicţie. Deci presupunerea făcută a fost falsă. Singura funcţie cu proprietăţile cerute este cea nulă. **(1p)**

CONCURSUL JUDEȚEAN "VIOREL SADOVEANU"

Ediția a II-a - 20.05.2023

Matematică

Clasa a XII - a

Problema 1. Pe mulţimea $M \subseteq \mathbb{R}^*$ se consideră legea de compoziţie

$$x * y = \frac{x \cdot [y] + [x] \cdot y}{2}, \quad \forall\ x, y \in M.$$

Să se arate că, dacă legea admite element neutru şi $M \cap \mathbb{Z} \neq \varnothing$, atunci $M \subseteq \mathbb{Z}$.

Problema 2. Să se calculeze:

$$a) \int \frac{dx}{x^{2024} + 2023x},\ x > 0; \qquad b) \int \frac{\sin x}{e^x + \sin x + \cos x} dx,\ x > 0.$$

Problema 3. Să se arate că dacă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi convexă pe $[0,1]$,

atunci

$$9 \cdot \int_{\frac{1}{3}}^{1} f(x) dx \leq 4 \cdot \int_0^1 f(x) dx + 2 \cdot f(1)$$

Timpul efectiv de lucru este de 2 ore;
Toate problemele sunt obligatorii.

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BIHOR | MINISTERUL EDUCAȚIEI | CENTRUL JUDEȚEAN DE EXCELENȚĂ BIHOR

CONCURSUL JUDEȚEAN "VIOREL SADOVEANU"
Ediția a II-a - 20.05.2023
Matematică
Clasa a XII - a

BAREM DE CORECTARE

Problema 1. Pe mulțimea $M \subseteq \mathbb{R}^*$ se consideră legea de compoziție

$$x * y = \frac{x \cdot [y] + [x] \cdot y}{2}, \quad \forall\, x, y \in M.$$

Să se arate că, dacă legea admite element neutru și $M \cap \mathbb{Z} \neq \varnothing$, atunci $M \subseteq \mathbb{Z}$.

Barem de corectare. Fie $e \in M$ elementul neutru și $k \in M \cap \mathbb{Z}$. Deoarece $k \neq 0$, din

$$k * e = k \Leftrightarrow \frac{k \cdot \left([e] + e\right)}{2} = k \Leftrightarrow [e] = 2 - e$$

rezultă că $e = 1$ $\left(\mathbf{4p}\right)$.

Astfel, pentru orice element $x \in M$, avem $x * 1 = x \Leftrightarrow \dfrac{x + [x]}{2} = x \Leftrightarrow x = [x]$, de unde rezultă că $x \in \mathbb{Z}$. Așadar, $M \subseteq \mathbb{Z}$ $\left(\mathbf{3p}\right)$.

Problema 2. Să se calculeze:

$$a) \int \frac{dx}{x^{2024} + 2023x},\ x > 0; \qquad b) \int \frac{\sin x}{e^x + \sin x + \cos x} dx,\ x > 0.$$

Barem de corectare. Avem:

$$a) \int \frac{dx}{x^{2024} + 2023x} = \frac{1}{2023} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x^{2022}}{x^{2023} + 2023} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2023} \left(\ln x - \frac{1}{2023} \ln\left(x^{2023} + 2023\right) \right) + C \quad \left(\mathbf{4p}\right)$$

$$b) \int \frac{\sin x}{e^x + \sin x + \cos x} dx = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{e^x + \cos x - \sin x}{e^x + \sin x + \cos x} \right) dx$$

$$= \ln \sqrt{\frac{e^x}{e^x + \sin x + \cos x}} + C \quad \left(\mathbf{3p}\right)$$

Problema 3. Să se arate că dacă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi convexă pe $[0,1]$, atunci

$$9\cdot\int_{\frac{1}{3}}^{1} f(x)\,dx \le 4\cdot\int_0^1 f(x)\,dx + 2\cdot f(1)$$

Barem de corectare. Dacă notăm $\dfrac{3x-1}{2}=t$, avem:

$$
\begin{aligned}
9\cdot\int_{\frac{1}{3}}^{1} f(x)\,dx &= 6\cdot\int_0^1 f\left(\frac{2t+1}{3}\right)dt \quad \textbf{(3p)}\\
&= 6\cdot\int_0^1 f\left(\frac{2}{3}\cdot t+\frac{1}{3}\cdot 1\right)dt \le 6\cdot\int_0^1\left(\frac{2}{3}\cdot f(t)+\frac{1}{3}\cdot f(1)\right)dt \quad \textbf{(3p)}\\
&= 4\cdot\int_0^1 f(t)\,dt + 2\cdot f(1) \quad \textbf{(1p)}
\end{aligned}
$$