Olimpiada Națională Gazeta Matematică

Etapa I, Județul BIHOR

Subiect

Clasa a IX - a

Timp de lucru: 120 de minute.
Fiecare problemă se punctează cu 1 punct.
Alegeţi varianta corectă de răspuns. O singură variantă este corectă.

1. Se consideră predicatul $\mathrm{p}(x,y):"1+\frac{x}{y}=xy"$; $x,y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Stabiliţi care dintre următoarele propoziţii sunt adevărate:

A) $(\forall\, x)\,(\forall\, y)\,\mathrm{p}(x,y)$ B) $(\forall\, x)\,(\exists y)\,\mathrm{p}(x,y)$

C) $(\forall\, y)\,(\exists x)\,\mathrm{p}(x,y)$ D) $(\forall\, y)\,\mathrm{p}\left(\sqrt{3},\ y\right)$

2. Dacă $\left|x^2-x-2\right|+\left|x^3-x^2+2\right|=2^y-1$, $x,y\in\mathbb{Z}$, atunci x^2+y^2 este:

A) 1 B) -1 C) 3 D) 4

3. Fie $a\in\mathbb{Q}^*$. Suma valorilor lui a pentru care $a+\frac{1}{a}\in\mathbb{Z}$ este:

A) 1 B) -1 C) 2 D) 0

4. Câte soluţii are ecuaţia: $z(x+y)=xy$, unde $x,y,z\in\mathbb{N}^*$ şi $(x,y,z)=1$.

A) 0 B) 1 C) 2 D) o infinitate

5. Antepenultima cifră a numărului $a=9+9^2+9^3+\ldots+9^{400}$ este:

A) 9 B) 0 C) 1 D) 8

6. Suma numerelor pare din intervalul $\left[n^2-n+1,n^2+n+1\right]$, $n\in\mathbb{N}^*$ este:

A) $n(n^2-1)$ B) n^2-n C) n^2+n D) $n(n^2+1)$

7. Soluţiile ecuaţiei $x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=1$ sunt:

A) $\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}\right)$ B) $1-\sqrt{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-1}$

C) $\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}\right)$ D) $1\pm\sqrt{2}$

8. Numerele $a,b,c\in\mathbb{R}$ satisfac egalitatea $2a^2+b^2+c^2=3$. Valoarea minimă pe care o poate lua expresia $a-2b+c$ este:

A) $\sqrt{\frac{33}{2}}$ B) $-\sqrt{33}$ C) $\frac{\sqrt{33}}{2}$ D) $-\sqrt{\frac{33}{2}}$

9. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $5[x^2]-3[x]+2=0$, $x\in\mathbb{R}$, este:

A) $\left[1,\sqrt{3}\right]$ B) $\left[-5,2\right]$ C) $\left[3,10\right]$ D) $\varnothing$

10. Pentru câte numere $n\in\mathbb{Z}$ numărul $a=\sqrt{\frac{4n-2}{n+5}}$ este raţional ?

A) 2 B) 3 C) 0 D) Alt răspuns

11. Numărul de elemente al mulţimii $A=\left\{\frac{n^2-n+4}{n^2+1}\middle| n\in\{1,2,\ldots,100\}\right\}$ este:

A) 100 B) 99 C) 98 D) 97

12. Partea întreagă a numărului $a=\frac{n^2+3n+3}{n+1}$, $n\in\mathbb{N}^*$ este:

A) $n-1$ B) n C) $n+1$ D) $n+2$

13. Câte numere naturale n pentru care numărul $\sqrt{n+1}+\sqrt{4n+21}\in\mathbb{Q}$, există?

A) 0 B) 2 C) Alt răspuns D) 4

14. Se dă ecuaţia $\left[\frac{x+a}{2}\right]=\frac{x+1}{3}$. Valorile lui a pentru care ecuaţia are cel puţin 3 soluţii sunt:

A) 1 B) Nu există C) $\frac{3}{2}$ D) -1

15. Fie hexagonul regulat $ABCDEF$ de latură 4. Modului vectorului $\vec{AC}+\vec{BD}$ este:

A) 10 B) 8 C) 6 D) 12

16. Fie triunghiul ABC. Considerăm $D \in (BC)$, astfel încât $BD = 2DC$, $E \in (AB)$ astfel încât $AE = EB$ şi F mijlocul medianei (CE). Determinaţi $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care $\vec{AF} = \alpha \cdot \vec{AD}$.

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{5}{4}$

17. Punctele A, B, C sunt distincte şi satisfac relaţia $\vec{AB}+3\vec{CB} = \vec{0}$. Valorile lui u şi v pentru care $\vec{MB} = u\vec{MA}+v\vec{MC}$, pentru orice punct M din plan, sunt:

A) $u=\frac{1}{4}, v=\frac{3}{4}$ B) $u=\frac{1}{2}, v=\frac{3}{2}$ C) $u=\frac{1}{4}, v=\frac{3}{2}$ D) $u=\frac{1}{2}, v=\frac{3}{4}$

18. Fie $[AB]$ şi $[CD]$ două coarde perpendiculare ale unui cerc de centru O şi $AB \cap CD = \{P\}$. Dacă $\vec{PA}+\vec{PB}+\vec{PC}+\vec{PD} = \alpha\vec{PO}$, atunci α este egal cu:

A) 2 B) $\frac{3}{2}$ C) -2 D) Alt răspuns

19. Se consideră triunghiul ABC şi punctele M şi N astfel încât $3\vec{BM} = \vec{MC}$ şi $k\vec{AN} = \vec{NC}$. Dacă B, N şi mijlocul segmentului (AM) sunt coliniare, atunci k este:

A) 3 B) 4 C) 2 D) $\frac{1}{4}$

20. Fie ABC un triunghi echilateral de centru O, iar P un punct în interiorul triunghiului. Se notează cu D, E, F proiecţiile lui P pe laturile respectiv $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$, iar cu A', B', C' mijloacele laturilor respectiv $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$. Dacă $\vec{DA'}+\vec{EB'}+\vec{FC'} = \alpha\vec{PO}$, atunci α este egal cu:

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{2}{3}$