



Olimpiada Națională Gazeta Matematică

Etapa I, Județul BIHOR



Subiect

Clasa a XII - a

Timp de lucru: 120 de minute.

Fiecare problemă se punctează cu 1 punct.

Alegeți varianta corectă de răspuns. O singură variantă este corectă.

Problemele 1 și 2 au următorul enunț comun: Se consideră grupul $(G, *)$, unde $G = (-1, 1)$ și $x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$, $\forall x, y \in (-1, 1)$.

1. Pentru care dintre perechile $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, funcția $f : (-1, 1) \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = \frac{ax + b}{1 + x}$ este un izomorfism de la grupul $(G, *)$ la grupul (\mathbb{R}_+, \cdot) ?

A $(-1, 1)$ B $(-1, -1)$ C $(0, 1)$ D $(1, 0)$

2. Dacă $A = \frac{1}{3} * \frac{1}{5} * \dots * \frac{1}{2021}$ și $B = \frac{1}{2} * \frac{1}{4} * \dots * \frac{1}{2020}$, atunci:

A $A > B$ B $A < B$ C $A - B = 0$ D $A + B = 1$

3. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și $G = (b, \infty)$. Pe mulțimea \mathbb{R} a numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = 2xy - 4ax - 4ay + 8a^2 + 2a$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Perechea $(G, *)$ este un grup, dacă și numai dacă

A $b = a$ B $a = 2$ și $b = 1$ C $a + b = 2$ D $b = 2a$

Problemele 4 și 5 au următorul enunț comun: Presupunem cunoscut faptul că mulțimea

$$G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & x \\ 0 & x & x & 0 \\ 0 & x & x & 0 \\ x & 0 & 0 & x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}^* \right\}$$

are o structură de grup în raport cu înmulțirea matricelor.

4. Elementul neutru al grupului (G, \cdot) este:

A I_2 B $A(1)$ C $A\left(\frac{1}{2}\right)$ D $A(0)$

5. Simetricul lui $A(x) \in G$ este:

A $A\left(\frac{1}{x}\right)$ B $A\left(\frac{1}{4x}\right)$ C $A(-x)$ D $A\left(\frac{1}{2x}\right)$

6. Dacă $n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$, atunci

A $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ B $4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z}$ C $2\mathbb{Z} \subset 6\mathbb{Z}$ D $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

7. Pe mulțimea \mathbb{N} se consideră operația ” $*$ ”, operație care verifică următoarele proprietăți:

- $x * 1 = x, \forall x \in \mathbb{N}$
- $x * x = 1, \forall x \in \mathbb{N}$
- $(a * b) \cdot (x * y) = (a \cdot x) * (b \cdot y), \forall a, b, x, y \in \mathbb{N}$

Dacă $2021 * 43 = a$, atunci

A $a = 47$ B $a = 2021$ C $a = 1$ D $a = 43$

8. Se consideră mulțimea $M = \{z \in \mathbb{C}^* \mid az^n = b\}$, unde $a, b \in \mathbb{C}^*$ și $n \in \mathbb{N}^*$. M este un subgrup al grupului (\mathbb{C}^*, \cdot) , dacă și numai dacă:

A $|a| = |b|$ B $a = b$ C $b = 1$ D $a = 1$

9. Numărul elementelor inversabile ale monoidului $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], \cdot)$ este:

A 1 B 2 C 3 D ∞

10. Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ și grupul $(GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$, unde

$$GL_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\},$$

iar ” \cdot ” este operația de înmulțire a matricelor. Dacă $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (GL_2(\mathbb{R}), \cdot)$ este un morfism de grupuri astfel încât $\varphi(1) = A$, atunci $\varphi(2021)$ este egal cu:

A $\varphi(2021) = (\sqrt{2})^{2021} \cdot A$ B $\varphi(2021) = 2^{1010} \cdot I_2$
 C $\varphi(2021) = -2^{1010} \cdot A$ D $\varphi(2021) = (\sqrt{2})^{2021} \cdot I_2$

Problemele 11 și 12 au următorul enunț comun: Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, definit prin

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x \, dx, \quad n \geq 1.$$

11. I_2 are valoarea:

A $\frac{\pi}{4}$ B 2 C 1 D $1 - \frac{\pi}{4}$

12. Șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ verifică relația:

A $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}$

B $I_{n+1} = 2I_n$

C $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n+1}$

D $I_{n+2} - I_n = \frac{1}{n+1}$

13. Se consideră funcția $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3 \cos x - \sin x}{2 \cos x + \sin x}$. Care dintre următoarele funcții este o primitivă a lui f ?

A $F(x) = 2x - 3 \ln(2 \cos x + \sin x)$

B $F(x) = x + 2 \ln(2 \cos x + \sin x)$

C $F(x) = x - \ln(2 \cos x + \sin x)$

D $F(x) = x + \ln(2 \cos x + \sin x)$

14. Dacă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verifică relația $f^{2021}(x) + 2021^{f(x)} = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, atunci:

A $f(x) = \log_{2021} x$

B f admite primitive pe \mathbb{R}

C f nu are proprietatea lui Darboux

D f nu este derivabilă pe \mathbb{R}

15. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^{2021}, & x \in \mathbb{Q} \\ 2021^x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Care dintre următoarele afirmații este adevărată?

A f este continuă pe \mathbb{R}

B f nu admite primitive

C f admite primitive

D f este derivabilă pe \mathbb{R}

16. Să se determine toate funcțiile polinomiale neconstante cu coeficienți reali, $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, știind că

$$2 \int_1^x P(t) dt = P(x) \cdot P(2-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A $P(x) = x - 1$

B $P(x) = x^2 - 1$

C $P(x) = (x - 2)^2$

D $P(x) = 1 - x$

17. Dacă $f : [0, 2] \rightarrow (0, \infty)$ este o funcție continuă, atunci $\int_0^2 \frac{f(x)}{f(x) + f(2-x)} dx$ are valoarea:

A $f(0)$

B 1

C $\ln 2$

D $f(2) - f(0)$

18. Să se determine funcțiile polinomiale $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, care satisfac relația

$$\int_x^{x+1} P(t) dt = 6x^2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

A $P(x) = 6x^2 - 6x + 1$

B $P(x) = x^3 + 6x^2 + 1$

C $P(x) = x^2 + x + 1$

D $P(x) = 6x + 1$

19. Valoarea integralei $\int_3^{15} \left(\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+17-8\sqrt{x+1}} \right) dx$, este:

A $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B 24

C 45

D 12

20. Se consideră funcțiile $f, g, G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, unde $G(x) = e^x \cdot f(x)$ și $g(x) = 2e^x \cdot f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Să se determine toate funcțiile derivabile f , știind că G este o primitivă a lui g .

A $f(x) = c \cdot \sin x, c \in \mathbb{R}$

B $f(x) = e^x + c, c \in \mathbb{R}$

C $f(x) = c \cdot e^x, c \in \mathbb{R}$

D $f(x) = c \cdot e^x \sin x, c \in \mathbb{R}$