Olimpiada Națională Gazeta Matematică
Etapa I, Judeţul BIHOR

Subiect
Clasa a XI - a

Timp de lucru: 120 de minute.
Fiecare problemă se punctează cu 1 punct.
Alegeţi varianta corectă de răspuns. O singură variantă este corectă.

1. Fie A, B ∈ $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = \begin{pmatrix} 15 & 2 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$ și $BA = \begin{pmatrix} a & -4 \\ 5 & b \end{pmatrix}$. Atunci valorile numerelor a și b sunt :

A) 15 și 12 B) 20 și 7 C) 3 și 60 D) 4 și 45

2. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Atunci suma elementelor matricii A^{100} este:

A) 0 B) 2^{51} C) 2^{50} D) -2^{51}

3. Ecuația $X^2 = \begin{pmatrix} 2021 & 1 \\ 2020 & 1 \end{pmatrix}$, X ∈ $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ are

A) 2 soluții B) 0 soluții C) o infinitate de soluții D) 4 soluții

4. Inversa matricii $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ este:

A) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

5. Valoarea determinantului $D = \begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ x^2+y^2 & y^2+z^2 & z^2+x^2 \\ x^3+y^3 & y^3+z^3 & z^3+x^3 \end{vmatrix}$ este

A) 0 B) 2xyz(y-x)(z-x)(z-y) C) 2xyz(x-y)(y-z)(x-z) D) (y-x)(z-x)(z-y)

6. Fie permutările σ, τ ∈ S_4, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.
Ecuația $x^2 \cdot \sigma^{2022} = \tau$ are :

A) 1 soluție B) 2 soluții C) 3 soluții D) nicio soluție

7. Dacă ε este soluția ecuației $x^2+x+1=0$ și $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \varepsilon^2 & 1 & 0\\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1\end{pmatrix}$ atunci suma elementelor matricii A^9 este:

A) 27ε - 15 B) 10ε + 3 C) 0 D) 3

8. Dacă matricea $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -3\end{pmatrix}$ atunci $A^2 - A^t + 3I_2$ este :

A) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 12\end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 12\end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -3\end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix}12 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$

9. Numărul real *a* pentru care $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2 & 4\\ 1 & -1 & -2 & 5\\ 3 & 4 & 3 & a\end{vmatrix}=0$ este :

A) 5 B) 2 C) -3 D) 0

10. Se consideră matricea A=$\begin{pmatrix}a & 1 & 2\\ 2 & a & 3\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$. Aflați valorile lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care $A^{-1} = A^*$ (am notat A^* matricea adjunctă a lui A).

A) $a = 2$ B) $a = 1$ C) $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ D) $a = 0$

11. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$ este :

A) 1 B) +∞ C) 0 D) $\frac{1}{e}$

12. Valoarea limitei

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-n\right)$$

este :

A) 0 B) - ∞ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$

13. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir crescător de numere naturale cu proprietatea că $a_{a_n} = 9n + 8\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2} =$

A) 0 B) 1 C) 9 D) +∞

14. Dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ atunci $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{x^3-3x^2+ax+b}+\sqrt[3]{x^3+2x^2+cx+d}-2x\right) =$

A) 0 B) $-\frac{1}{3}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) -∞

15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cosx\cdot\sqrt{cos2x}\cdot\sqrt[3]{cos3x}}{x^2} =$

A) 3 B) $\frac{1}{2}$ C) 7 D) +∞

16. Valoarea limitei $\lim_{x \to 0}\left(\frac{3^x+4^x+5^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} =$

A) $\sqrt[3]{60}$ B) 5 C) e D) $+\infty$

17. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Care din următoarele afirmații este adevărată ?

A) Șirul are limita 0
B) Șirul e divergent
C) Șirul are limita 1
D) Șirul nu e mărginit

18. Care din următoarele afirmații este adevărată?

A) Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este divergent și $(b_n)_{n\geq 1}$ este divergent atunci $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ este divergent.

B) Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent și $(b_n)_{n\geq 1}$ este divergent atunci $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$ este divergent.

C) Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent atunci $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

D) Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este divergent atunci $(a_n)_{n\geq 1}$ este nemărginit.

19. Câte funcții periodice $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ există ?

A) niciuna B) una C) două D) o infinitate

20. Valorile $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care limita $\lim_{n \to \infty} n\left(an - \sqrt{n^2 + bn + c}\right)$ este finită sunt :

A) $a \in \{-1, 1\}$, b=0, $c \in \mathbb{R}$
B) a=1, b=0, $c \in \mathbb{R}$
C) a=1, b, $c \in \mathbb{R}$
D) a = -1, b=0, $c \in \mathbb{R}$