Olimpiada Naţională Gazeta Matematică

Etapa I, Judeţul BIHOR

Subiect

Clasa a X - a

Timp de lucru: 120 de minute.

Fiecare problemă se punctează cu 1 punct.

Alegeţi varianta corectă de răspuns. O singură variantă este corectă.

1. Dacă $a = \sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[12]{2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[2020 \cdot 2021]{2}$, atunci:

   $\boxed{\text{A}}$ $a = 2$ $\boxed{\text{B}}$ $a > 2$ $\boxed{\text{C}}$ $a = 1$ $\boxed{\text{D}}$ $a < 2$

2. Dacă $a = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$, atunci:

   $\boxed{\text{A}}$ $a = 1 + \sqrt{2}$ $\boxed{\text{B}}$ $a = 1$ $\boxed{\text{C}}$ $a = 1 + \sqrt{5}$ $\boxed{\text{D}}$ $a = 2 - \sqrt{5}$

3. Să se determine valorile lui n, pentru care $\sqrt[n]{17\sqrt{5} + 38} + \sqrt[n]{17\sqrt{5} - 38} = \sqrt{20}$.

   $\boxed{\text{A}}$ $n = 2$ $\boxed{\text{B}}$ $n = 3$ $\boxed{\text{C}}$ $n = 4$ $\boxed{\text{D}}$ $n = 5$

4. Să se determine $(x, y, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pentru care are sens

$$\sqrt[1+2x-y^2]{\sqrt[1+2y-z^2]{\sqrt[1+2z-x^2]{x+y+z}}}.$$

   $\boxed{\text{A}}$ $(1, 1, 1)$ $\boxed{\text{B}}$ $(1, 2, 1)$ $\boxed{\text{C}}$ $(2, 2, 2)$ $\boxed{\text{D}}$ $(2, 1, 1)$

5. Să se calculeze partea întragă a numărului $\sqrt[4]{n(n+1)(n+2)(n+3)}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

   $\boxed{\text{A}}$ n $\boxed{\text{B}}$ $n + 1$ $\boxed{\text{C}}$ $n + 2$ $\boxed{\text{D}}$ $n + 3$

6. Fie $a \in (1, \infty)$, şi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Determinaţi minimul funcţiei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt[n]{a^x} + \sqrt[2n]{a^{x^2 - x}} + \sqrt[4n]{a^{x^2 - 2x}}$$

   şi punctul $x_0 \in \mathbb{R}$ pentru care se obţine valoarea minimă.

   $\boxed{\text{A}}$ $x_0 = 1,\ \min f = 3$ $\boxed{\text{B}}$ $x_0 = 0,\ \min f = 1$

   $\boxed{\text{C}}$ $x_0 = 2,\ \min f = 2$ $\boxed{\text{D}}$ $x_0 = 0,\ \min f = 3$

7. Să se determine relaţia dintre a şi b, dacă $a = \log_3 \sqrt{x}$ şi $b = \log_3 9x$.

[A] $a = b + 2$ [B] $2a = b - 2$ [C] $2a = b + 1$ [D] $a = 3b - 1$

8. Dacă $a = \log_2 5$ şi $b = \log_2 3$, atunci:

[A] $\log_{15} 12 = \dfrac{1+b}{a+b}$ [B] $\log_{15} 12 = \dfrac{3+b}{a+b}$

[C] $\log_{15} 12 = \dfrac{b}{a+b}$ [D] $\log_{15} 12 = \dfrac{2+b}{a+b}$

9. Să se determine a, dacă $\log_3 5 \cdot \log_7 8 \cdot \log_{15} 11 = \log_3 8 \cdot \log_7 11 \cdot \log_{15} a$.

[A] $a = 7$ [B] $a = 11$ [C] $a = 8$ [D] $a = 5$

10. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$\lg x = \lg\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \lg\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + ... + \lg\left(1 - \frac{1}{2021^2}\right).$$

[A] $\dfrac{1022}{2021}$ [B] $\dfrac{1013}{2021}$ [C] $\dfrac{1011}{2021}$ [D] $\dfrac{1009}{2021}$

11. Numărul rădăcinilor ecuaţiei $4^x \cdot 9^{-\frac{1}{x}} + 9^x \cdot 4^{-\frac{1}{x}} = \dfrac{275}{6}$ este

[A] 0 [B] 1 [C] 2 [D] 4

12. Numărul rădăcinilor ecuaţiei $5^{x^2} = 2^{x^2} + 3^{x^2}$ este

[A] 1 [B] 2 [C] 3 [D] 4

13. Numărul rădăcinilor ecuaţiei $x \cdot 2^{\frac{1}{x}} + 2^x \cdot \dfrac{1}{x} = 4$ este

[A] 1 [B] 2 [C] 3 [D] 4

14. Să se determine inversa funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \log_2(2-x), & x \in (-\infty, 1] \\ -(x-1)^2, & x \in (1, \infty) \end{cases}$.

[A] $f^{-1}(x) = \begin{cases} 1 - 2^x, & x \in [0, \infty) \\ 2 - \sqrt{x}, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$

[B] $f^{-1}(x) = \begin{cases} 2 + 2^x, & x \in [0, \infty) \\ 3 + \sqrt{-x}, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$

[C] $f^{-1}(x) = \begin{cases} 2 - 2^x, & x \in [0, \infty) \\ 1 + \sqrt{-x}, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$

[D] $f^{-1}(x) = \begin{cases} 2 - 2^x, & x \in [0, \infty) \\ 1 - \sqrt{-x}, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$

15. Să se stabilească unde este situată soluţia (x, y) a sistemului $\begin{cases} 3^x = \sqrt{y} \\ 2^{-y} = x^3 \end{cases}$.

$\boxed{\text{A}}$ $[1, \infty) \times [3, \infty)$ $\boxed{\text{B}}$ $[0, 1) \times [2, 4]$ $\boxed{\text{C}}$ $[1, 2] \times [3, 5]$ $\boxed{\text{D}}$ $[1, \infty) \times [2, \infty)$

16. Să se stabilească unde este situată soluţia (x, y) a sistemului $\begin{cases} 9^x = \sqrt[4]{y} \\ 2^{-2y} = 8x^3 \end{cases}$.

$\boxed{\text{A}}$ $(0, 1) \times (0, 2)$ $\boxed{\text{B}}$ $(1, 2) \times (1, 2)$ $\boxed{\text{C}}$ $(0, 1) \times (2, 4)$ $\boxed{\text{D}}$ $(1, 2) \times (0, 1)$

17. Să se calculeze $\frac{a}{b}$, dacă $2 \lg a - \lg b = \lg \left(a + \frac{3b}{4} \right)$.

$\boxed{\text{A}}$ 3 $\boxed{\text{B}}$ 1 $\boxed{\text{C}}$ $\frac{3}{2}$ $\boxed{\text{D}}$ $\frac{2}{3}$

18. Câte funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care verifică proprietatea $f(x + y) = x + f(y)$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, există ?

$\boxed{\text{A}}$ 1 $\boxed{\text{B}}$ 2 $\boxed{\text{C}}$ 3 $\boxed{\text{D}}$ o infinitate

Problemele 19 şi 20 au următorul enunţ comun: Fie $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ o funcţie care verifică proprietatea $f(f(x) + y) = x + f(y)$, $\forall\ x, y \in \mathbb{Q}$.

19. Dacă funcţia $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ verifică această proprietate, care dintre următoarele afirmaţii este adevărată ?

$\boxed{\text{A}}$ f este injectivă, dar nu este surjectivă

$\boxed{\text{B}}$ f este surjectivă, dar nu este injectivă

$\boxed{\text{C}}$ f nu este nici injectivă şi nici surjectivă

$\boxed{\text{D}}$ f este bijectivă

20. Câte funcţii verifică această proprietate?

$\boxed{\text{A}}$ 1 $\boxed{\text{B}}$ 2 $\boxed{\text{C}}$ 3 $\boxed{\text{D}}$ o infinitate